

SKRIPSI

**SIMULASI HAMBURAN PARTIKEL OLEH POTENSIAL YUKAWA
DENGAN MENGGUNAKAN MICROSOFT EXCEL**

***SIMULATION OF PARTICLE SCATTERING BY YUKAWA'S POTENTIAL BY
USING MICROSOFT EXCEL***



Yuliana Rambu Lika Enga
1341100183

**PROGRAM STUDI S1 FISIKA
JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN KOMPUTER
UNIVERSITAS KRISTEN IMMANUEL
YOGYAKARTA**

2018

SKRIPSI

**SIMULASI HAMBURAN PARTIKEL OLEH POTENSIAL YUKAWA
DENGAN MENGGUNAKAN MICROSOFT EXCEL**

***SIMULATION OF PARTICLE SCATTERING BY YUKAWA'S POTENTIAL BY
USING MICROSOFT EXCEL***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat
Bachelor of Science Ilmu Fisika



Yuliana Rambu Lika Enga

1341100183

**PROGRAM STUDI S1 FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN KOMPUTER
UNIVERSITAS KRISTEN IMMANUEL
YOGYAKARTA**

2018

SKRIPSI

**SIMULASI HAMBURAN PARTIKEL OLEH POTENSIAL YUKAWA
DENGAN MENGGUNAKAN MICROSOFT EXCEL**

Telah dipersiapkan dan disusun oleh

Yuliana Rambu Lika Enga
1341100183

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 30 Mei 2018

Susunan Tim Penguji

Richard Tao Roni Hutagalung, S.Si., M.Sc.

Pembimbing Utama/Penguji

Surjawirawan Dwiputranto, S.Si.,
M.Si.

Penguji

Caesnan Marendra Grahan Leditto, S.Si., M.Sc.

Penguji

Skripsi ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan
Untuk memperoleh gelar *Bachelor of Science*
Tanggal 30 Mei 2018

Caesnan Marendra Grahan Leditto, S.Si., M.Sc.
Pengelola Program Studi S1 Fisika

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 30 Mei 2018

Yuliana Rambu Lika Enga

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

- Tuhan Yesus Kristus sebagai Juru Selamatku Yang Hidup
- Keluarga Besarku, Bapa dan Mamaku Tercinta
- Kakak dan Adik-Adikku
- Pacarku Tersayang
- Semua Teman-Temanku
- dan Almamaterku

"Tetapi hikmat yang dari atas adalah pertama-tama murni selanjutnya pendamai, peramah, penuh belas kasihan dan buah-buah yang baik, tidak memihak dan munafik."

(Yakobus 3:17)

"Jagalah hatimu dengan segala kewaspadaan, karena dari situlah terpancar kehidupan."

(Amsal 4:23)

"Orang sukses takkan pernah mengeluh bagaimana kalau akan gagal, namun berusaha bagaimana untuk berhasil."

PRAKATA

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Kuasa atas Berkah Hikmat dan Pengetahuan yang dianugerahkan-Nya kepada penulis dalam menyusun skripsi yang berjudul "Simulasi Hamburan Partikel oleh Potensial Yukawa dengan Menggunakan Microsoft Excel" dapat diselesaikan dengan baik.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penulisan skripsi ini banyak mengalami kendala. Namun berkat bantuan, bimbingan, kerjasama dari berbagai pihak dan berkat dari Tuhan yang Maha Kuasa, kendala yang dihadapi tersebut dapat teratasi dengan baik.

Untuk itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada orang-orang terbaik yang telah mendampingi penulis oleh saran, ide, dan masukan terlebih-lebih atas pemberian semangat di dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Ucapan terima kasih tersebut penulis sampaikan kepada:

1. Bapak Surjawiran Dwiputranto, S.Si, M.Si. sebagai Dekan Fakultas Fiskom, yang telah memberikan kebijakan, bimbingan, arahan dan dukungannya kepada penulis.
2. Bapak Caesnan Marendra Grahan Leditto, S.Si, M.Sc. sebagai Ketua Program Studi Fisika yang telah memberikan kebijakan, motivasi, dan bimbingannya kepada penulis.
3. Bapak Richard Tao Roni Hutagalung, S.Si, M.Sc. sebagai dosen pembimbing pertama, yang selalu setia dan penuh kasih sayang dan kesabaran memberikan bimbingan, petunjuk, motivasi dan masukan-masukan kepada penulis sehingga skripsi ini dapat selesai dengan baik.
4. Bapak Caesnan Marendra Grahan Leditto, S.Si, M.Sc. sebagai dosen pembimbing kedua yang penuh kasih, kesabaran, dan motivasi dalam memberikan bimbingan serta ide-ide kepada penulis sehingga skripsi ini dapat selesai.
5. Bapak Asan Damanik (Alm.), terima kasih banyak sudah memberikan penulis ide dan motivasi untuk skripsi ini, dan terima kasih atas semangat Bapak selama ini.
6. kepada keluarga besarku tercinta, Bapa Umbu Kamodu Lani Bora, Mama Rambu Sebi Nipa, Kakak Yohanes Sili Dingu, Desi R. Lawu Nedi, Sepri U. Giku

Loda, dan Adik Rut R. Sedu Tegi, yang telah memberikan perhatian dan kasih sayang selama ini, memberi dukungan, nasehat, serta sudah membiayai perkuliahan, terlebih lagi tidak henti-hentinya berdoa untuk penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Semoga apa yang Bapa dan Mama korbankan menjadi bekal untuk mencapai cita-cita penulis di masa depan.

7. Bapak Soni dan Ibu Retno dan semua saudara-saudariku terkasih di Gereja KGPM, Organisasi PERMAS Yogyakarta yang sudah memberikan semangat dan doa untuk penulis.
8. Buat teman-teman seperjuanganku (Rahel, Ina, dan Nia), semua pihak yang membantu dalam penyusunan skripsi ini. Buat Nia, tetap semangat, kepada teman-teman KEMASIKA, adik-adikku tersayang, Emi, Ester, Risto, dan semua adik-adik yang tidak penulis sebutkan satu per satu, yang sudah memberikan semangat, membantu dan mendoakan penulis agar segera menyelesaikan penulisan dan penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan dan perlu penyempurnaan lebih lanjut. Oleh karena itu, saran dan kritik yang sifatnya membangun akan sangat berharga bagi penulis. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca guna menambah pengenalan lebih lanjut tentang "Simulasi Hamburan Partikel oleh Potensial Yukawa dengan Menggunakan Microsoft Excel". Tuhan Yesus memberkati.

Yogyakarta, Juni 2018

Penulis

DAFTAR ISI

PRAKATA	vi
DAFTAR ISI	ix
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Batasan Masalah	1
1.3 Rumusan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	2
1.5 Tinjauan Pustaka	2
1.6 Manfaat Penelitian	3
1.7 Metode Penelitian	3
1.8 Sistematika Penulisan	3
II DASAR TEORI	5
2.1 Persamaan Schrödinger Relativistik	5
2.2 Persamaan Schrödinger Non-Relativistik	6
2.2.1 Pemisahan Peubah	7
2.2.2 Persamaan Sudut	8
2.2.3 Persamaan Radial	10
2.3 Metode Frobenius	10
III METODOLOGI PENELITIAN	12
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	12
3.2 Metode Penelitian	12
3.3 Rancangan Penelitian	12
3.4 Teknik Analisa Data	12
3.5 Diagram Alir Penelitian	13
3.6 Diagram Alir Program	13
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	15
4.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Schrödinger untuk Potensial Yukawa secara Semi-Analitik	15
4.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Schrödinger untuk Potensial Yukawa secara Numerik	19
4.3 Perbandingan antara Metode Semi-Analitik dan Metode Numerik	23
V KESIMPULAN DAN SARAN	25
5.1 Kesimpulan	25
5.2 Saran	25

DAFTAR PUSTAKA	26
A Prosedur Pendiskritan Penyelesaian Persamaan (4.35) dengan Metode Euler	27
B Prosedur Pendiskritan Penyelesaian Persamaan (4.35) dengan Metode Runge-Kutta	29

INTISARI

SIMULASI HAMBURAN PARTIKEL OLEH POTENSIAL YUKAWA DENGAN MENGGUNAKAN MICROSOFT EXCEL

Oleh :

Yuliana Rambu Lika Enga

1341100183

Penelitian ini membahas penyelesaian sistem persamaan diferensial parsial, yaitu persamaan Schrödinger non-relativistik untuk tenaga potensial berupa potensial Yukawa. Solusi dari persamaan diferensial tersebut dapat berupa solusi analitik, semi-analitik, maupun numerik. Selanjutnya, akan dilakukan simulasi grafis dengan menggunakan paket program Microsoft Excel.

Kata-kata kunci: diferensial, potensial, numerik, analitik, simulasi, hamburan

ABSTRACT

SIMULATION OF PARTICLE SCATTERING BY YUKAWA'S POTENTIAL BY USING MICROSOFT EXCEL

By

Yuliana Rambu Lika Enga

1341100183

This work tell about solution of system of partial differential equations, that is equation of non-relativistic Schrödinger's equation for potential energy as Yukawa potential. Solution of the differential equations can be analytical, semi-analytical, or numerical solution. Then, it will done graphical simulation by using program package Microsoft Excel.

Keywords : differential, potential, numerical, analitical, simulation, scattering

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebuah atom terdiri dari sebuah inti atom dan elektron-elektron yang mengelilinginya. Medan potensial yang berkaitan dengan interaksi antara inti atom dan elektron itu merupakan potensial Coulomb, yaitu

$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.1)$$

di mana Z merupakan nomor atom (jumlah proton), $e := 1,602(10^{-19})\text{C}$ merupakan besar muatan elementer, $\epsilon_0 := 8,854(10^{-12})\text{C}^2/(\text{Nm}^2)$ adalah permitivitas listrik ruang hampa, dan r adalah jarak antara sebuah elektron dan inti atom.

Medan potensial yang berkaitan dengan interaksi antar-nukleon penyusun inti itu merupakan potensial Yukawa, yaitu

$$V = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}, \quad (1.2)$$

di mana r merupakan jarak antara dua nukleon, μ merupakan besaran yang tergantung pada massa nukleon, dan V_0 merupakan potensial Yukawa dengan jarak antar-nukleon sejauh r_0 sedemikian $e^{-\mu r_0} = \mu r_0$. (Muslim, 1991)

Medan tenaga potensial Yukawa merupakan bentuk umum dari medan tenaga potensial Coulomb. Persamaan (1.2) dapat tereduksi menjadi persamaan (1.1) apabila $V_0 e^{-\mu r} / \mu = -Ze^2 / (4\pi\epsilon_0)$. Nilai μ dan V_0 pada persamaan (1.2) harus dipilih sedemikian agar sesuai dengan gejala alamiah dalam fisika nuklir yang sesungguhnya.

Sampai sekarang, belum ada orang yang mencoba untuk mencari fungsi gerak partikel yang diakibatkan oleh tenaga potensial Yukawa. Lain halnya untuk tenaga potensial Coulomb yang telah terdokumentasi dengan sangat rapi. Biasanya, untuk tenaga potensial Yukawa, orang telah mencariampang lintang hamburan dan amplitudo hamburan, tetapi tidak tertarik untuk mencari fungsi gerak partikel tersebut.

1.2 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini hanya akan dibahas mengenai

1. penyelesaian persamaan Schrödinger non-relativistik, yaitu

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (1.3)$$

dengan mencari penyelesaian untuk fungsi gelombang Ψ yang bergantung pada posisi \vec{r} dan waktu t , dengan sebarang syarat batas, menggunakan metode deret pangkat Frobenius, untuk potensial Yukawa,

2. perhitungan pendekatan numerik untuk menyelesaikan persamaan (1.3) dengan metode simulasi grafik tak bergerak.

1.3 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Seperti apa penyelesaian persamaan Schrödinger non-relativistik untuk potensial Yukawa?
2. Seperti apa simulasi fungsi gelombang kebolehjadian non-relativistik yang bergantung pada posisi dan waktu untuk potensial Yukawa?

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. mencari penyelesaian persamaan Schrödinger non-relativistik untuk potensial Yukawa,
2. menampilkan simulasi fungsi gelombang kebolehjadian non-relativistik yang bergantung pada posisi dan waktu untuk potensial Yukawa.

1.5 Tinjauan Pustaka

Halzen, Francis, dan Martin, Alan (1984) dan Ryder, Lewis (1985) berusaha menelusuri asal muasal potensial Yukawa, yaitu persamaan (1.2), dengan metode yang sangat lanjut. Kemudian keduanya berhasil mencariampang lintang hamburan dan amplitudo hamburan tanpa menyelesaikan persamaan Schrödinger dengan menggunakan metode diagram Feynman yang dirasa sangat berat untuk dilakukan dalam

skripsi ini. Di sini, penulis tidak akan mencari tampang lintang hamburan dan amplitudo hamburan oleh potensial Yukawa tersebut, melainkan penulis hanya mencari penyelesaian persamaan Schrödinger untuk potensial Yukawa, yaitu mencari fungsi gelombang radial dari persamaan Schrödinger bagian radial, sebab dari fungsi gelombang yang diperoleh ini nanti orang dapat menggali berbagai macam informasi terkait fungsi gelombang ini, termasuk tampang lintang hamburan dan amplitudo hamburan. Penulis sengaja tidak mencari fungsi gelombang sudut, sebab bentuknya sama dengan penyelesaian persamaan Schrödinger sudut untuk potensial radial, yaitu potensial yang hanya bergantung pada jarak radial saja.

1.6 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah

1. menambah referensi dalam kepustakaan fisika nuklir,
2. menambah keterampilan dalam menyelesaikan persamaan diferensial,
3. menambah keterampilan dalam melakukan komputasi numerik dan simulasi grafis dengan menggunakan Microsoft Excel.

1.7 Metode Penelitian

Metode penelitian ini antara lain adalah dengan studi literatur, melakukan perhitungan matematis (baik analitik, semi-analitik, maupun numerik), membuat grafik spasial dengan menggunakan Microsoft Excel, dan melakukan simulasi dengan menggunakan Microsoft Excel.

1.8 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari 5 (lima) bab, yaitu sebagai berikut.

- BAB I PENDAHULUAN berisi tentang latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, serta sistematika penulisan.
- BAB II DASAR TEORI berisi tentang asal mula persamaan gaya konservatif, serta asal mula persamaan Schrödinger relativistik yang akan disederhanakan menjadi persamaan Schrödinger non-relativistik.

- BAB III METODOLOGI PENELITIAN membahas tentang metode yang digunakan, rancangan penelitian, diagram alir penelitian dan diagram alir program.
- BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN membahas penyelesaian persamaan Schrödinger non-relativistik untuk potensial Yukawa.
- BAB V KESIMPULAN DAN SARAN membahas rangkuman dari skripsi ini beserta keunggulan dan kelemahannya.

BAB II

DASAR TEORI

2.1 Persamaan Schrödinger Relativistik

Tenaga kinetik partikel relativistik adalah

$$T = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2, \quad (2.1)$$

di mana p adalah besar momentum partikel relativistik, $c := 299792458$ m/s adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, dan m adalah massa rehat partikel.

Hukum kelestarian tenaga relativistik adalah

$$E = T + V = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 + V \quad (2.2)$$

alias

$$E + mc^2 - V = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}, \quad (2.3)$$

di mana E , T , dan V , berturut-turut adalah tenaga mekanik, tenaga kinetik, dan tenaga potensial milik partikel relativistik tersebut.

Pengkuadratan kedua ruas persamaan (2.3) menghasilkan

$$E^2 + (mc^2)^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad (2.4)$$

alias

$$E^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V - (pc)^2 = 0. \quad (2.5)$$

Simpangan gelombang partikel bebas di \vec{r} pada waktu t adalah

$$\Psi = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}, \quad (2.6)$$

di mana N adalah tetapan normalisasi, \vec{p} adalah momentum partikel kuantum, dan $\hbar := 1,055 \cdot \dots (10^{-34})$ Js adalah tetapan Planck tereduksi.

Dari persamaan (2.6), diperoleh $\nabla\Psi = i\vec{p}\Psi/\hbar$, $\nabla^2\Psi = -p^2\Psi/\hbar^2$, $p := |\vec{p}|$, $p^2\Psi = -\hbar^2\nabla^2\Psi$, $\partial\Psi/\partial t = -iE\Psi/\hbar$, $E\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t$, dan $(pc)^2 = -(\hbar c)^2\nabla^2\Psi$. Persamaan (2.5)

dapat ditulis kembali menjadi

$$(E^2 + V^2 + 2mc^2 E - 2VE - 2mc^2 V - (pc)^2)\Psi = 0, \quad (2.7)$$

sehingga

$$\left(-\hbar^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + V^2 + 2mc^2 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V\right) - 2i\hbar V \frac{\partial}{\partial t} + (\hbar c)^2 \nabla^2\right)\Psi = 0 \quad (2.8)$$

alias

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2mc^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \frac{V^2}{2mc^2} + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V\right) - \frac{i\hbar}{mc^2} V \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\right)\Psi = 0 \quad (2.9)$$

alias

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right) + V \left(1 - \frac{1}{2mc^2} \left(V - 2i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (2.10)$$

yang merupakan persamaan Schrödinger relativistik.

2.2 Persamaan Schrödinger Non-Relativistik

Limit non-relativistik dari persamaan (2.10), yaitu $c \rightarrow \infty$, adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (2.11)$$

yang merupakan persamaan Schrödinger non-relativistik.

Andaikan Ψ pada persamaan (2.11) dipisahkan menjadi bagian gayut ruang dan bagian gayut waktu, yaitu bahwa $\Psi := \psi\tau$, di mana ψ hanya gayut \vec{r} , dan τ hanya gayut t , maka persamaan (2.11) menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \tau \nabla^2 \psi + V\psi\tau = i\hbar \psi \frac{d\tau}{dt} \quad (2.12)$$

alias

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} + V = i\hbar \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = E = \text{tetapan} \quad (2.13)$$

alias

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (V - E)\psi = 0 \quad (2.14)$$

dan

$$\frac{d\tau}{dt} = -i\frac{E}{\hbar}\tau \quad \text{alias} \quad \frac{d\tau}{\tau} = -i\frac{E}{\hbar}dt \quad \text{alias} \quad \ln \frac{\tau}{\tau_0} = -i\frac{E}{\hbar}t \quad \text{alias} \quad \tau = \tau_0 e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.15)$$

2.2.1 Pemisahan Peubah

Dalam sistem koordinat bola, ψ bergantung pada (r, θ, ϕ) , serta

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.16)$$

Apabila dianggap $\psi = RY$, di mana R hanya bergantung pada r , dan Y hanya bergantung pada (θ, ϕ) , maka persamaan Schrödinger tadi menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = (E - V)RY.$$

Di sini, secara khusus, V hanya bergantung pada r . Apabila kedua ruas persamaan terakhir dikalikan dengan $-2mr^2/(\hbar^2 RY)$, maka diperoleh

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = -\frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V),$$

alias

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V) = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right].$$

Mengingat ruas kiri persamaan terakhir hanya bergantung pada r , serta ruas kanan persamaan terakhir hanya bergantung pada (θ, ϕ) , sedangkan r, θ, ϕ itu saling bebas, maka kedua ruas persamaan tersebut pasti merupakan tetapan, misalnya $l(l+1)$, di mana alasan pemilihan tetapan tersebut akan terlihat kemudian. Oleh karena itu, persamaan terakhir dapat dipecah menjadi dua buah persamaan, yaitu

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V) = l(l+1) \quad (2.17)$$

dan

$$\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = -l(l+1). \quad (2.18)$$

2.2.2 Persamaan Sudut

Hasil pecahan persamaan Schrödinger yang hanya bergantung pada (θ, ϕ) merupakan persamaan sudut, yang apabila kedua ruasnya dikalikan dengan $Y \sin^2 \theta$, maka persamaan tersebut menjadi

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y \sin^2 \theta. \quad (2.19)$$

Apabila dimisalkan lagi $Y = \Theta \Phi$, dengan Θ hanya bergantung pada θ , dan Φ hanya bergantung pada ϕ , maka persamaan terakhir menjadi

$$\Phi \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \Theta \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -l(l+1)\Theta \Phi \sin^2 \theta \quad (2.20)$$

alias

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}. \quad (2.21)$$

Karena ruas kiri persamaan terakhir hanya bergantung pada θ , dan ruas kanan persamaan terakhir hanya bergantung pada ϕ , maka kedua ruas tersebut pasti merupakan tetapan, misalnya m_l^2 , sehingga persamaan terakhir dapat dipecah menjadi dua buah persamaan, yaitu

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m_l^2 \quad (2.22)$$

dan

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_l^2 \quad \text{alias} \quad \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m_l^2 \Phi. \quad (2.23)$$

Secara formal, penyelesaian persamaan ϕ adalah $\Phi = \Phi_\phi(\phi) = \Phi_+ e^{im_l \phi} + \Phi_- e^{-im_l \phi}$, dengan Φ_\pm merupakan tetapan integrasi. Karena Φ harus periodik terhadap ϕ dengan periode 2π , maka haruslah $\Phi_\phi(\phi + 2\pi) = \Phi_\phi(\phi)$, sehingga m_l harus merupakan bilangan bulat.

Persamaan θ dapat ditulis kembali menjadi

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m_l^2] \Theta = 0, \quad (2.24)$$

yang merupakan persamaan Legendre terasosiasi. Penyelesaiannya adalah

$$\Theta = A P_l^{m_l}(\cos \theta), \quad (2.25)$$

di mana A merupakan tetapan, dan

$$P_l^{m_l}(\chi) := (1 - \chi^2)^{|m_l|/2} \left(\frac{d}{d\chi} \right)^{|m_l|} P_l(\chi) \quad (2.26)$$

merupakan fungsi Legendre terasosiasi, dengan

$$P_l(\chi) := \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d\chi} \right)^l (\chi^2 - 1)^l \quad (2.27)$$

merupakan polinom Legendre ke- l , yang dikenal sebagai rumus Rodrigues. Ternyata, l harus merupakan bilangan bulat tak negatif, sebab berdasarkan rumus Rodrigues, apabila l merupakan bilangan bulat negatif, maka $1/l! = 0$ yang menyebabkan $P_l(\chi) = 0$. Di samping itu, apabila $|m_l| > l$, maka $P_l^{m_l}(\chi) = 0$, sehingga agar $P_l^{m_l}(\chi) \neq 0$, haruslah $|m_l| \leq l$. Oleh karena itu, untuk setiap nilai $l \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, terdapat $(2l + 1)$ buah nilai m_l , yaitu $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(l - 1), \pm l$.

Elemen volume dalam sistem koordinat bola adalah $d^3 \vec{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, sehingga $\psi := RY$ tadi dapat dinormalkan meliputi seluruh ruang, yaitu bahwa haruslah

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 d^3 \vec{r} \equiv \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1. \quad (2.28)$$

Salah satu kemungkinan yang paling mudah adalah

$$\int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1 \quad \text{dan} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1. \quad (2.29)$$

Fungsi gelombang sudut Y yang telah ternormalisasi ini ternyata merupakan fungsi selaras sferis, yaitu

$$Y = Y_l^{m_l}(\theta, \phi) := \epsilon_{m_l} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m_l|)!}{4\pi(l+|m_l|)!}} e^{im_l \phi} P_l^{m_l}(\cos \theta), \quad (2.30)$$

dengan

$$\epsilon_{m_l} := \begin{cases} (-1)^{m_l} & \text{jika } m_l \geq 0 \\ 1 & \text{jika } m_l \leq 0 \end{cases}. \quad (2.31)$$

Lebih lanjut lagi, ternyata

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^{m_l}(\theta, \phi)]^* Y_l^{m_l'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{m_l m_l'}. \quad (2.32)$$

2.2.3 Persamaan Radial

Persamaan (2.17) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V)R = l(l+1)R. \quad (2.33)$$

Apabila dimisalkan $u := rR$, maka persamaan terakhir menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = Eu, \quad (2.34)$$

yang dikenal sebagai persamaan radial, yang identik dengan persamaan Schrödinger satu dimensi, di mana bagian tenaga potensialnya diganti dengan tenaga potensial efektif, yaitu

$$V_{\text{ef}} := V + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}. \quad (2.35)$$

Suku $l(l+1)\hbar^2/(2mr^2)$ ini dikenal sebagai suku sentrifugal.

2.3 Metode Frobenius

Apabila $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ dan $\alpha_n \in C^\infty(\mathbb{C}^{n+2}, \mathbb{C})$ dengan $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, maka untuk mencari f dari persamaan diferensial

$$\alpha_n \left(z, f(z), \frac{d}{dz} f(z), \left(\frac{d}{dz} \right)^2 f(z), \dots, \left(\frac{d}{dz} \right)^n f(z) \right) = 0, \quad (2.36)$$

dapat digunakan metode Frobenius dengan pertolongan deret Taylor.

Dengan memperderetkan persamaan (2.36), diperoleh

$$\begin{aligned} & \sum_{j, j_0, \dots, j_n=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\prod_{m=0}^n \frac{1}{j_m!} \right) \lim_{w \rightarrow 0} \left(\prod_{p=0}^n \lim_{w_p \rightarrow 0} \right) \\ & \left(\left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^j \prod_{q=0}^n \left(\frac{\partial}{\partial w_q} \right)^{j_q} \alpha_n(w, w_0, \dots, w_n) \right) \\ & z^j \prod_{l=0}^n \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^l f(z) \right)^{j_l} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dengan pengandaian bahwa

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{r+s}, \quad (2.38)$$

di mana $a_r \in \mathbb{C}$ dan $s \in \mathbb{R}$ untuk setiap $r \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$, adalah tetapan-tetapan yang hendak dicari dari persamaan (2.37), maka

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^l f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{(r+s-l)!} a_r z^{r+s-l}, \quad (2.39)$$

lalu

$$\left(\left(\frac{d}{dz} \right)^l f(z) \right)^{j_l} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{(r+s-l)!} a_r z^{r+s-l} \right)^{j_l}. \quad (2.40)$$

Dengan memperhatikan rumus binomial Newton dan trinomial Newton, dapat diperoleh rumus polinomial Newton, yaitu

$$\left(\sum_{\alpha=1}^M x_{\alpha} \right)^N = N! \sum_{\beta=0}^N \sum_{\beta_1=0}^{\beta} \left(\prod_{\gamma=1}^{M-3} \sum_{\beta_{\gamma+1}=0}^{\beta_{\gamma}} \right) \frac{x_1^{N-\beta} x_2^{\beta-\beta_1} \left(\prod_{\epsilon=1}^{M-3} x_{\epsilon+2}^{\beta_{\epsilon}-\beta_{\epsilon+1}} \right) x_M^{\beta_{M-2}}}{(N-\beta)! (\beta-\beta_1)! \left(\prod_{\phi=1}^{M-3} (\beta_{\phi}-\beta_{\phi+1})! \right) \beta_{M-2}!}, \quad (2.41)$$

di mana $M \in \mathbb{N}$, $M > 3$, $N \in \mathbb{N}_0$, dan $0 \neq x_{\alpha} \in \mathbb{C}$ untuk setiap $\alpha \in \{1, \dots, M\}$.

Dengan penuh kesabaran, ketekunan, dan ketelitian ekstra, menggunakan persamaan (2.41), maka semua nilai s yang terdapat secara implisit pada persamaan (2.37), dan yang terdapat secara eksplisit pada persamaan (2.40), serta semua nilai a_r untuk setiap $r \in \mathbb{N}_0$, dapat dicari, sehingga diperoleh bentuk eksplisit dari semua fungsi f berbentuk deret pangkat yang memenuhi persamaan (2.36).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada waktu-waktu luang sela-sela jam kuliah sekitar tahun 2017 sampai 2018 di depan Laboratorium Fisika, Fakultas Sains dan Komputer, Universitas Kristen Immanuel Yogyakarta.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur, latihan perhitungan matematis berupa latihan menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan metode deret pangkat Frobenius, latihan intuisi fisis dengan melakukan idealisasi sistem fisis, dan latihan melakukan komputasi numeris dan simulasi menggunakan paket program Microsoft Excel.

3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian ini adalah

1. menyelesaikan persamaan diferensial Schrödinger untuk potensial Yukawa dengan metode deret pangkat Frobenius,
2. menerapkan metode numerik untuk menampilkan simulasi grafis dengan menggunakan Microsoft Excel.

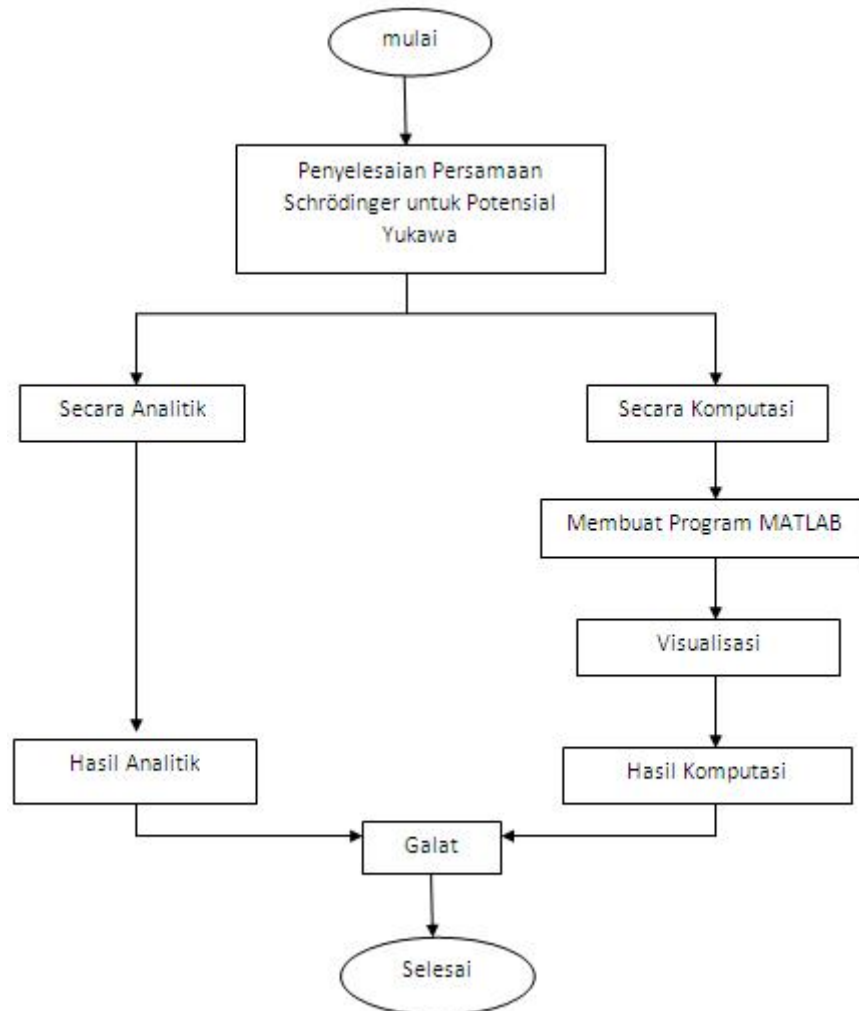
3.4 Teknik Analisa Data

Data-data numerik dalam penelitian ini diperoleh dengan dua cara, yaitu

1. dengan memakai deret pangkat hasil penyelesaian persamaan diferensial parsial setelah memotong suku-suku deret berorde tinggi,
2. dengan metode iterasi numerik sebagai salah satu siasat dalam pemrograman.

3.5 Diagram Alir Penelitian

Diagram alir penelitian dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1: Diagram Alir Penelitian

3.6 Diagram Alir Program

Diagram alir program dapat dilihat pada gambar 3.2.



Gambar 3.2: Diagram Alir Program

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Schrödinger untuk Potensial Yukawa secara Semi-Analitik

Dari persamaan (2.34) dan (1.2), diperoleh

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = Eu \quad (4.1)$$

alias

$$\alpha \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\beta \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{\gamma}{r^2} \right] u = Eu \quad (4.2)$$

di mana

$$\alpha := -\frac{\hbar^2}{2m}, \quad \beta := \frac{V_0}{\mu}, \quad \gamma := \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m}. \quad (4.3)$$

Dengan memisalkan

$$u := \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{j+s}, \quad (4.4)$$

di mana $a_j \in \mathbb{C}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}_0$, dan $s \in \mathbb{R}$ suatu tetapan yang hendak dicari kemudian, diperoleh

$$\frac{du}{dr} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s) r^{j+s-1}, \quad (4.5)$$

lalu

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) r^{j+s-2}. \quad (4.6)$$

Ungkapan $e^{-\mu r}$ dapat diperderetkan menjadi

$$e^{-\mu r} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j \mu^j r^j. \quad (4.7)$$

Kemudian,

$$\frac{u}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k+s-1} \quad (4.8)$$

dan

$$\frac{u}{r^2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{j+s-2}. \quad (4.9)$$

Oleh karena itu, persamaan (4.2) menjadi

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) r^{j+s-2} + \beta \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j \mu^j a_k r^{j+k+s-1} \\ + \gamma \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{j+s-2} = E \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{j+s} \end{aligned} \quad (4.10)$$

alias

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{p(j+s-2)} r^p \\ + \beta \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j \mu^j a_k \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{p(j+k+s-1)} r^p \\ + \gamma \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{p(j+s-2)} r^p = E \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{p(j+s)} r^p, \end{aligned} \quad (4.11)$$

di mana δ adalah delta Kronecker.

Dengan menyamakan koefisien dari r^p pada persamaan (4.11), diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+s)(j+s-1) \delta_{p(j+s-2)} + \beta \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j \mu^j a_k \delta_{p(j+k+s-1)} \\ + \gamma \sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta_{p(j+s-2)} = E \sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta_{p(j+s)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

sehingga

$$\begin{aligned} \alpha a_{p-s+2} (p+2)(p+1) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j \mu^j a_{p-j-s+1} \\ + \gamma a_{p-s+2} = E a_{p-s}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dengan memisalkan

$$p-s =: q \quad \Leftrightarrow \quad p = q+s, \quad (4.14)$$

maka persamaan (4.13) menjadi

$$\alpha a_{q+2}(q+s+2)(q+s+1) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j \mu^j a_{q-j+1} + \gamma a_{q+2} = E a_q \quad (4.15)$$

alias

$$[\alpha(q+s+2)(q+s+1) + \gamma] a_{q+2} + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j \mu^j a_{q-j+1} = E a_q. \quad (4.16)$$

Untuk $q = -2$, persamaan (4.16) menjadi

$$[\alpha s(s-1) + \gamma] a_0 = 0 \quad (4.17)$$

untuk setiap $a_0 \in \mathbb{C}$, karena $a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \dots = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} \alpha s(s-1) + \gamma = 0 &\Leftrightarrow \alpha s^2 - \alpha s + \gamma = 0 \Leftrightarrow s = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \\ &\Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\gamma}{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}) \\ &\Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{(2l+1)^2} \right) = \frac{1}{2} (1 \pm (2l+1)) =: s_{\pm} \\ &\Leftrightarrow s_+ = l+1 \quad \text{dan} \quad s_- = -l. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Untuk $q = -1$, persamaan (4.16) menjadi

$$[\alpha(s_{\pm} + 1)s_{\pm} + \gamma] a_{1\pm} + \beta a_0 = 0 \quad (4.19)$$

alias

$$a_{1\pm} = -\frac{\beta}{\alpha(s_{\pm} + 1)s_{\pm} + \gamma} a_0 =: b_{1\pm} a_0. \quad (4.20)$$

Untuk $q = 0$, persamaan (4.16) menjadi

$$[\alpha(s_{\pm} + 2)(s_{\pm} + 1) + \gamma] a_{2\pm} + \beta a_1 - \beta \mu a_0 = E a_0. \quad (4.21)$$

alias

$$\begin{aligned} [\alpha(s_{\pm} + 2)(s_{\pm} + 1) + \gamma]a_{2\pm} &= (E + V_0)a_0 - \beta a_{1\pm} \\ &= \left[E + V_0 + \frac{\beta^2}{\alpha(s_{\pm} + 1)s_{\pm} + \gamma} \right] a_0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

alias

$$a_{2\pm} = \frac{E + V_0 + \frac{\beta^2}{\alpha(s_{\pm} + 1)s_{\pm} + \gamma}}{\alpha(s_{\pm} + 2)(s_{\pm} + 1) + \gamma} a_0 =: b_{2\pm} a_0, \quad (4.23)$$

dan seterusnya.

Dengan memisalkan

$$u_{\pm} := \sum_{j=0}^{\infty} a_{j\pm} r^{j+s_{\pm}} \quad (4.24)$$

di mana

$$a_{j\pm} = b_{j\pm} a_0, \quad a_{0\pm} = a_0, \quad b_{0\pm} = 1, \quad (4.25)$$

maka

$$u_{\pm} = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} b_{j\pm} r^{j+s_{\pm}}, \quad (4.26)$$

sehingga u dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari u_+ dan u_- dengan A_{\pm} adalah tetapan, yaitu bahwa

$$u = A_+ u_+ + A_- u_- = rR \quad (4.27)$$

alias

$$u = A_+ a_0 \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+} r^{j+s_+} + A_- a_0 \sum_{j=0}^{\infty} b_{j-} r^{j+s_-}. \quad (4.28)$$

Dengan memisalkan tetapan baru B_{\pm} sebagai

$$A_{\pm} a_0 =: B_{\pm}, \quad (4.29)$$

maka diperoleh

$$u = B_+ \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+} r^{j+s_+} + B_- \sum_{j=0}^{\infty} b_{j-} r^{j+s_-} = rR \quad (4.30)$$

alias

$$R = \frac{1}{r} \left(B_+ \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+} r^{j+s_+} + B_- \sum_{j=0}^{\infty} b_{j-} r^{j+s_-} \right). \quad (4.31)$$

4.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Schrödinger untuk Potensial Yukawa secara Numerik

Persamaan (4.1) adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = Eu \quad (4.32)$$

di mana

$$V := V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}. \quad (4.33)$$

Persamaan (4.32) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \left[\frac{2m(V-E)}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u \quad (4.34)$$

alias

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = I \quad (4.35)$$

di mana

$$I := \left[\frac{2m(V-E)}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u. \quad (4.36)$$

Persamaan (4.35) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{du}{dr} = \left(\frac{du}{dr} \right)_0 + \int_0^r I dr. \quad (4.37)$$

Persamaan (4.37) dapat ditulis kembali menjadi

$$u = u_0 + \int_0^r \frac{du}{dr} dr. \quad (4.38)$$

Pendiskritan persamaan (4.37) adalah

$$\left(\frac{du}{dr} \right) [n+1] = \left(\frac{du}{dr} \right)_0 + \int_0^{r^{[n]}} I dr, \quad (4.39)$$

di mana $\alpha[n]$ adalah nilai α pada iterasi ke- n . Lihat Lampiran A.

Pendiskritan persamaan (4.38) adalah

$$u[n+1] = u_0 + \int_0^{r^{[n]}} \frac{du}{dr} dr. \quad (4.40)$$

Bentuk lain dari persamaan (4.39) adalah

$$\left(\frac{du}{dr}\right)[n+1] = \left(\frac{du}{dr}\right)_0 + \sum_{j=0}^n I[j] dr[j], \quad (4.41)$$

di mana $I[j]$ adalah nilai I untuk $r = r[j]$.

Bentuk lain dari persamaan (4.40)

$$u[n+1] = u_0 + \sum_{j=0}^n \left(\frac{du}{dr}\right)[j] dr[j]. \quad (4.42)$$

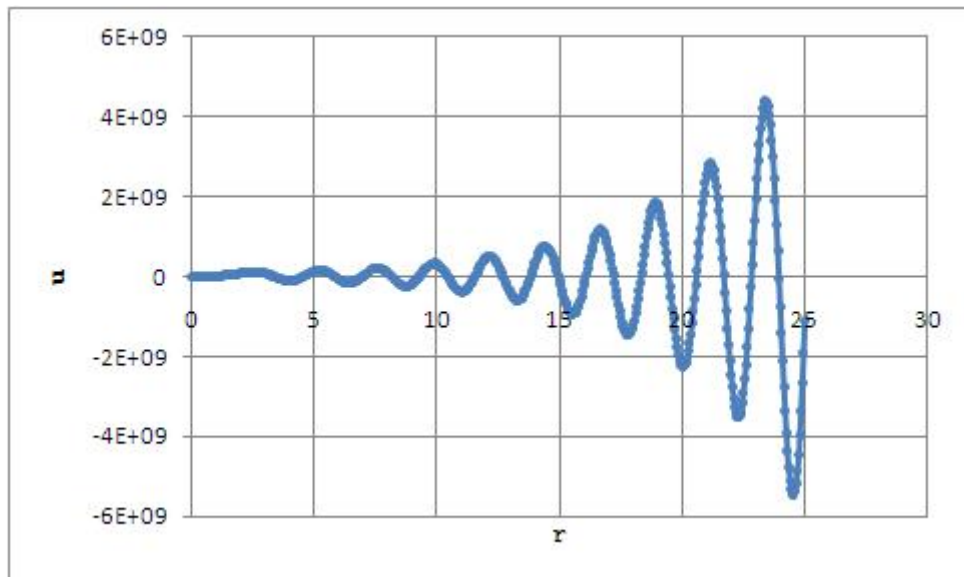
Ada dua definisi besaran diskrit, yaitu

$$I[j] := \left[\frac{2m(V[j] - E)}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{(r[j])^2} \right] u[j] \quad (4.43)$$

dan

$$V[j] := V_0 \frac{e^{-\mu r[j]}}{\mu r[j]}. \quad (4.44)$$

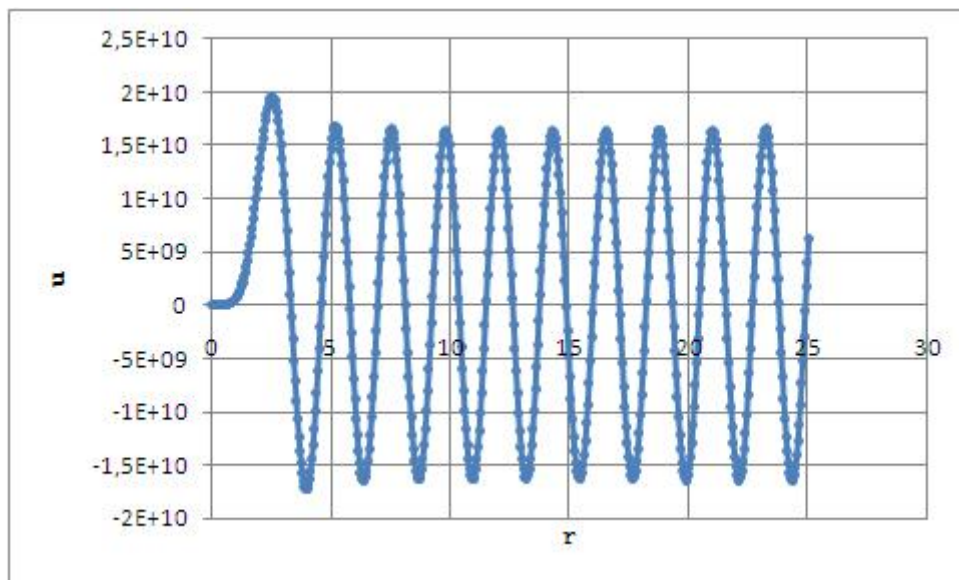
Hasil penyelesaian numerik untuk $r_0 := 0,01$, $dr := 0,05$, $u_0 := 0,25$, $(du/dr)_0 := 0$, $V_0 := -1$, $\mu := 7$, $E := 4$, $m := 1$, $\hbar := 1$, $l := 5$ dalam sistem satuan kuantum relativistik ($\hbar = c = 1$ dan $1 \text{ GeV} = 1$) ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Hasil Penyelesaian Numerik u vs r dengan Metode Pertama

Di sini, penulis hendak membandingkan bentuk grafik pada Gambar 4.1 de-

ngan bentuk grafik apabila digunakan metode Runge-Kutta. Lihat Lampiran B.



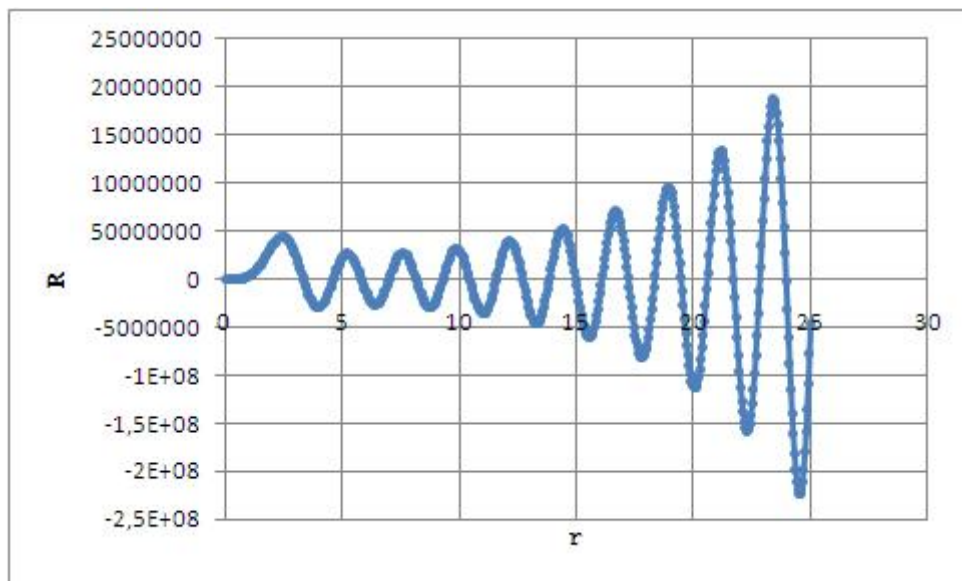
Gambar 4.2: Hasil Penyelesaian Numerik u vs r dengan Metode Kedua

Demikian juga, hasil penyelesaian numerik R vs r dengan metode pertama, disajikan pada Gambar 4.3, serta hasil penyelesaian numerik R vs r dengan metode kedua, disajikan pada Gambar 4.4. Ternyata tampak perbedaan yang mencolok.

Apabila suku-suku pada persamaan (4.30) dan (4.31), kita potong suku-suku setelah suku kedua, maka akan diperoleh fungsi kuadrat, yang mana metode analitik (tanpa metode numerik) pun sudah cukup untuk mengplot grafik u vs r dan grafik R vs r . Belum lagi, grafik yang diperoleh dari hasil pemotongan suku-suku deret tak hingga dengan hanya melibatkan suku kenol, pertama, dan kedua saja, sangat jauh mendekati penyelesaian analitik yang sesungguhnya. Selain itu, yang lebih mengherankan lagi adalah mengapa grafik numeris yang diperoleh dari metode Euler itu sangat berbeda dengan grafik numeris yang diperoleh dari metode Runge-Kutta. Tampak bahwa amplitudo getaran u dan R cenderung meningkat (menurun) seiring dengan meningkatnya r pada metode Euler (Runge-Kutta). Penyebab perbedaan yang sangat mencolok ini harus diteliti dengan menghitung limit

$$R_{\infty} := \lim_{r \rightarrow \infty} R \quad (4.45)$$

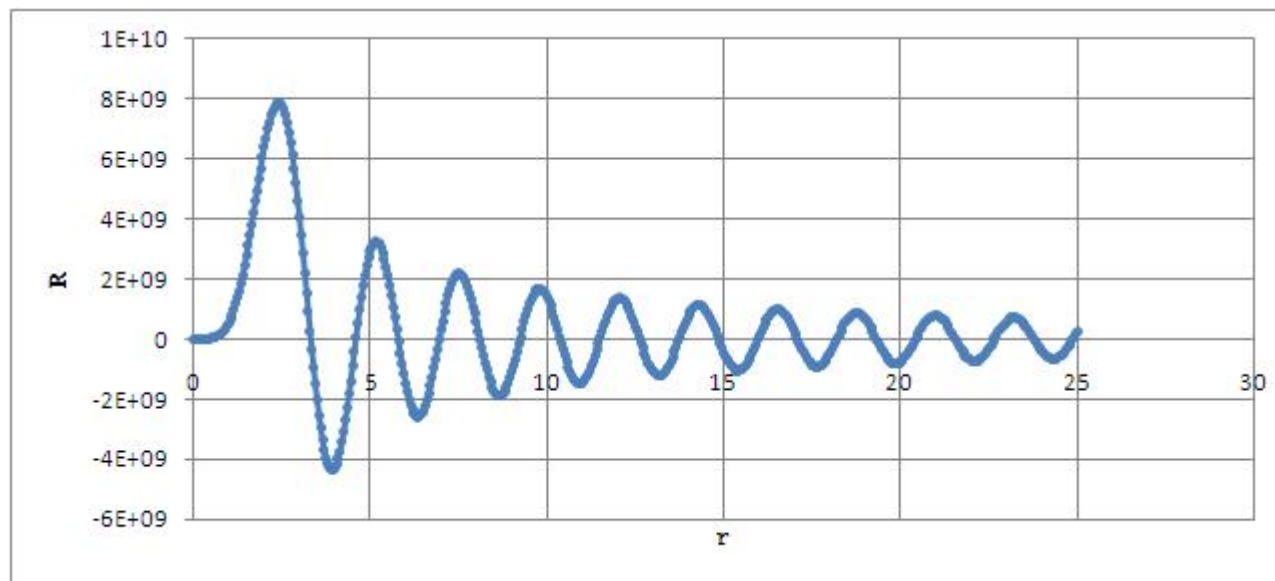
yang nilainya konvergen atau divergen untuk kedua metode tersebut. Ternyata, untuk metode Euler, nilai R_{∞} itu divergen, sedangkan untuk metode Runge-Kutta, nilai R_{∞}



Gambar 4.3: Hasil Penyelesaian Numerik R vs r dengan Metode Pertama

itu konvergen, dalam kasus ini.

Kalau ditinjau dari filosofi fisis, sebenarnya benarkah rapat peluang dua buah nukleon agar saling berdekatan itu cenderung lebih besar daripada rapat peluang dua buah nukleon agar saling berjauhan, menurut metode Runge-Kutta? Inilah misterinya. Berdasarkan metode Euler, rapat peluang kedua nukleon agar saling berdekatan itu lebih kecil daripada rapat peluang kedua nukleon agar saling berjauhan. Perbedaan ini dapat dipahami dengan intuisi fisis menggunakan potensial nuklir dan potensial Coulomb. Apabila minimal salah satu dari kedua nukleon itu adalah neutron, maka potensial Coulomb-nya pasti nol, sedangkan potensial nuklirnya pasti ada (tidak nol). Apabila kedua nukleon tersebut sama-sama proton, maka potensial Coulomb dan potensial nuklirnya pasti ada. Gaya Coulomb (gaya listrik) antara dua buah proton itu tentu tolak-menolak, sedangkan gaya nuklir antara dua buah proton tentu tarik-menarik yang sangat kuat, jauh lebih kuat daripada gaya tolak-menolak Coulomb-nya, sehingga rapat peluang dua buah nukleon (yang dalam hal ini proton) untuk saling berdekatan tentu cenderung lebih besar daripada rapat peluang dua buah nukleon untuk saling berjauhan. Jadi, metode Runge-Kutta-lah yang sesuai dengan intuisi ini. Lalu, pertanyaannya adalah, apakah metode Euler tidak dapat diterapkan di sini. Menurut hemat penulis, memang, metode Euler terkesan lebih masuk akal daripada metode Runge-Kutta. Tetapi, mengapa justru metode Runge-Kutta-lah yang sesuai dengan intuisi tadi?



Gambar 4.4: Hasil Penyelesaian Numerik R vs r dengan Metode Kedua

4.3 Perbandingan antara Metode Semi-Analitik dan Metode Numerik

Kalau kita memakai persamaan (4.31) untuk menggambar grafik u vs r , dan kita memotong suku-suku deret tersebut setelah suku kedua, yaitu kita hanya melibatkan suku kenol, pertama, dan kedua saja, maka kita akan mendapatkan fungsi kuadrat yang grafiknya berupa parabola. Grafik parabola ini sangat tidak menggambarkan penyelesaian analitik dari persamaan (4.1) yang sebenarnya, sehingga metode penggambaran grafik dengan pemotongan suku-suku deret ini tidak dapat dipakai, kecuali kalau kita memotong suku-suku deret sedemikian rupa sehingga kita melibatkan sejumlah besar (banyak sekali) suku-suku deret tersebut. Cara terakhir ini teramat sangat merepotkan. Jangankan sampai suku ke-120, misalnya, sedangkan sampai suku kedua saja, kita sudah sangat repot untuk mendapatkan masing-masing koefisien dari r tersebut.

Penyelesaian numerik u vs r memiliki kelemahan dan keunggulan. Kelemahannya adalah bahwa kita sulit menerima informasi secara utuh mengenai fungsi seperti apakah sebenarnya u vs r secara matematis murni. Keunggulannya adalah bahwa kita bisa menerima informasi grafis yang mungkin mustahil kita peroleh apabila kita benar-benar ingin mengetahui seperti apa kaitan u dengan r secara pendekatan numeris, meskipun kadang-kadang muncul ralat (kesalahan) komputatis yang cenderung membengkok yang menyebabkan hasilnya mungkin sering kali menyimpang

dari hasil analitis. Hanya saja, di dalam skripsi ini, terdapat dua buah metode numerik yang dipakai, yaitu metode Euler dan metode Runge-Kutta. Grafik u vs r dari kedua metode tersebut berbeda jauh. Secara fisis, potensial efektif pada persamaan (2.35) merupakan sebuah bukit potensial yang sangat curam sekali di titik yang mendekati titik asal, sehingga peluang klasik dua buah nukleon untuk saling berdekatan itu cenderung teramat sangat kecil sekali, karena kejadian kedua nukleon untuk saling berdekatan ini berlangsung dalam waktu yang teramat sangat singkat. Kedua nukleon tersebut dapat berlama-lama untuk saling berjauhan menurut persamaan (2.34). Ini semua ternyata tergantung pada pemilihan V_0 , μ , E , \hbar , dan l .

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil Sub-Bab 4.1, diperoleh bahwa hasil pendekatan semi-analitik dengan metode deret kurang memberikan informasi hasil analitik apabila kita hanya melibatkan suku-suku sampai suku ke-2 saja. Belum lagi, meskipun kita memakai suku-suku sampai suku ke-tak-terhingga, kita harus mempertanyakan daerah konvergensi deret tersebut yang belum tentu sama dengan domain dari fungsi hasil penyelesaian persamaan diferensial tersebut. Sedangkan dari hasil Sub-Bab 4.2, kita dapat mengetahui pendekatan tampilan numerik berupa grafik yang mungkin mendekati dengan hasil analitik. Berdasarkan metode Euler, amplitudo osilasi nilai u maupun R tampak membesar seiring dengan bertambahnya nilai r . Sedangkan berdasarkan metode Runge-Kutta, amplitudo osilasi nilai u maupun R tampak mengecil seiring dengan bertambahnya nilai r . Tampaknya, metode yang lebih cocok diterapkan di sini adalah metode Runge-Kutta, karena bentuk grafik u terhadap r mendekati bentuk sinusoidal seperti bentuk grafik gelombang tunak partikel bebas. Ini dapat dimaklumi, sebab, pada grafik potensial efektif V_{ef} terhadap r , tampak bahwa nilai V_{ef} sangat mendekati nol untuk nilai r yang tidak sama dengan nol. Nilai tenaga potensial yang sama dengan nol itu merupakan tenaga potensial partikel bebas.

5.2 Saran

Sebenarnya dalam mekanika kuantum, baik non-relativistik maupun relativistik, posisi partikel itu tidak boleh ditentukan secara pasti, melainkan merupakan kebolehjadian belaka.

Persamaan Schrödinger yang dipakai di dalam penelitian ini masih memakai yang non-relativistik. Padahal untuk menelaah kajian fisika nuklir seharusnya memakai persamaan Schrödinger relativistik. Tetapi, yang mengherankan adalah mengapa tenaga nuklir memakai tenaga diam relativistik, yaitu kesetaraan massa-energi, meskipun persamaan gerak kuantum yang dipakai adalah persamaan Schrödinger non-relativistik. Ini masih menjadi tanda tanya besar.

DAFTAR PUSTAKA

- Arfken & Weber, 2005, *Mathematical Methods for Physicist*, Elsevier Academic Press, San Diego California.
- Ayres, Frank, JR, 1984, *Theory and Problems of Differential Equations*, Erlangga, Jakarta.
- Boas, Mary, 1983, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, John Willey & Sons, New York.
- Goldstein, H., 1980, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Manila.
- Halzen, Francis, dan Martin, Alan, 1984, *Quarks and Leptons: An Introductory in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York.
- Muslim, 1991, *Analisis Vektor dan Tensor dalam Fisika Matematik*, Jurusan Fisika UGM, Yogyakarta.
- Rosyid, M. F., 2005, *Mekanika Kuantum*, I-Es-Ye & WGMPCDG Jurusan Fisika UGM, Yogyakarta.
- Ryder, Lewis, 1985, *Quantum Field Theory*, University Press, Cambridge.
- Tao R. H., 2016, *Formulasi Matematika dan Fisika*, Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Triatmodjo, Bambang, 2002, *Metode Numerik*, Beta Offset, Yogyakarta.

LAMPIRAN A

Prosedur Pendiskritan Penyelesaian Persamaan (4.35) dengan Metode Euler

Persamaan (4.35) adalah

$$\frac{d^2u}{dr^2} = I. \quad (1.1)$$

Pengintegralan persamaan (1.1) untuk interval yang sangat kecil adalah

$$\int_r^{r+dr} \frac{d^2u}{dr^2} dr = \int_r^{r+dr} I dr \quad (1.2)$$

alias

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_r(r+dr) = \frac{du}{dr} + I dr. \quad (1.3)$$

Pendiskritan persamaan (1.3) adalah

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_r(r[n+1]) = \left(\frac{du}{dr}\right)_r(r[n]) + I_r(r[n]) dr. \quad (1.4)$$

Karena $\alpha_r(r[n]) = \alpha[n]$, maka persamaan (1.4) menjadi

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dr}\right)[n+1] &= \left(\frac{du}{dr}\right)[n] + I[n] dr & (1.5) \\ &= \left(\frac{du}{dr}\right)[n-1] + (I[n-1] + I[n]) dr \\ &= \left(\frac{du}{dr}\right)[n-2] + (I[n-2] + I[n-1] + I[n]) dr \\ &= \left(\frac{du}{dr}\right)[0] + \sum_{j=0}^n I[n-j] dr[n-j] \\ &= \left(\frac{du}{dr}\right)[0] + I[n] dr[n] + \dots + I[1] dr[1] + I[0] dr[0] \\ &= \left(\frac{du}{dr}\right)[0] + \sum_{j=0}^n I[j] dr[j], \end{aligned}$$

yang sesuai dengan persamaan (4.41).

Yang akan dipakai di sini adalah persamaan (1.5) yang lebih teliti.

Untuk mendapatkan persamaan (4.42), dapat dilakukan secara serupa seperti

halnya ketika mendapatkan persamaan (4.41) (Triatmodjo, Bambang , 2016), yaitu

$$\begin{aligned}
 u[n+1] &= u[n] + \left(\frac{du}{dr}\right)[n]dr & (1.6) \\
 &= u[n-1] + \left(\frac{du}{dr}\right)[n-1]dr + \left(\frac{du}{dr}\right)[n]dr \\
 &= u[n-2] + \left(\frac{du}{dr}\right)[n-2]dr + \left(\frac{du}{dr}\right)[n-1]dr + \left(\frac{du}{dr}\right)[n]dr \\
 &= u[0] + \sum_{j=0}^n \left(\frac{du}{dr}\right)[n-j]dr[n-j] \\
 &= u[0] + \left(\frac{du}{dr}\right)[n]dr[n] + \cdots + \left(\frac{du}{dr}\right)[1]dr[1] + \left(\frac{du}{dr}\right)[0]dr[0] \\
 &= u[0] + \sum_{j=0}^n \left(\frac{du}{dr}\right)[j]dr[j]
 \end{aligned}$$

yang sesuai dengan persamaan (4.42).

LAMPIRAN B

Prosedur Pendiskritan Penyelesaian Persamaan (4.35) dengan Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah sebagai berikut. Persamaan (1.5) dan (1.6) hendak diganti dengan persamaan

$$\left(\frac{du}{dr}\right)[n+1/2] = \left(\frac{du}{dr}\right)[n] + I[n] dr/2, \quad (2.1)$$

$$u[n+1/2] = u[n] + \left(\frac{du}{dr}\right)[n] dr/2, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{du}{dr}\right)[n+1] = \left(\frac{du}{dr}\right)[n] + I[n+1/2] dr, \quad (2.3)$$

$$u[n+1] = u[n] + \left(\frac{du}{dr}\right)[n+1/2] dr, \quad (2.4)$$

dengan cara mendiskritkan urutan langkah menjadi setengahan.