Aljabar, Analisis, dan Geometri

R. Tao R. H.

20 September 2018

Kata Pengantar

Monograf singkat ini berisi beberapa formulasi / perumusan dalam ilmu matematika dan fisika secara khusus dan mendalam yang menurut hemat penulis dianggap penting serta jarang dan belum pernah dibahas di kebanyakan buku teks kuliah maupun di situs-situs internet / dunia maya. Urutan penyajian masalah dalam monograf ini tidak diurutkan berdasarkan sejarah kronologis yang sebenarnya dari beberapa masalah tersebut, melainkan semata-mata diurutkan dengan datangnya masalah ke dalam pikiran penulis. Pembaca diharapkan kritis dalam membaca, menelaah, meneliti, dan mengoreksi isi monograf ini dari bab ke bab, karena kebanyakan dari beberapa masalah yang disajikan dalam monograf ini bersifat *open-ended* yang harus diteliti lagi secara terus-menerus dan berkesinambungan. Monograf ini merupakan kelanjutan dari kedua monograf kami yang pertama, sehingga kami selaku penulis tidak akan banyak menjelaskan lagi secara detail mengenai sebagian arti teknis dari beberapa istilah matematika dan fisika. Dalam hal ini, pembaca harap memakluminya.

Mengingat penyajian masalah dalam monograf ini tidaklah urut, terutama dalam menjelaskan definisi dan arti istilah-istilah matematika dan fisika, maka para pembaca hendaknya tidak membaca monograf ini urut mulai dari awal hingga akhir, karena sebuah istilah boleh jadi sudah dijelaskan di kedua monograf kami sebelumnya, atau baru akan dijelaskan di bab-bab selanjutnya, atau bahkan sudah sering dijelaskan di buku teks kuliah di luar monograf ini, sehingga untuk dapat memahami monograf ini diperlukan beberapa pra-syarat yang harus dipenuhi. Terus terang, bahwa monograf ini bukanlah sebuah ensiklopedia matematika dan fisika yang dapat menjawab segala rasa ingin tahu pembaca, mengingat yang dipaparkan di sini hanyalah beberapa masalah saja, sehingga monograf ini masih teramat sangat jauh dikatakan lengkap dan jelas. Hal ini semata-mata disebabkan oleh keterbatasan penulis dan keterbatasan izin toleransi waktu penggarapan yang diberikan kepada penulis. Oleh karena itu, masih diperlukan saran dan kritik yang membangun demi kemajuan monograf ini untuk selanjutnya.

Daftar Isi

Bab 1

Dimensi dan Satuan

1.1 Dimensi Sudut Datar

Sebenarnya, 1 radian itu tidak sama dengan 1 tanpa satuan.

Panjang busur lingkaran berjari-jari R dengan sudut pusat θ sering kali ditulis sebagai $s = \theta R$ apabila kita memakai sistem satuan sedemikian rupa $1\,\mathrm{rad} = 1$. Apabila kita ingin mengetahui rumus panjang busur lingkaran tersebut yang sebenarnya, tanpa menerapkan penyamaan $1\,\mathrm{rad} = 1$, maka sebenarnya

$$s = \frac{\theta}{360^\circ}2\pi R = \frac{\theta}{2\pi\,\mathrm{rad}}2\pi R = \frac{\theta}{1\,\mathrm{rad}}R = \frac{\theta R}{\mathrm{rad}}. \tag{1.1}$$

Inilah rumus panjang busur lingkaran yang sebenarnya.

Sebagai contoh, kita ingin mengetahui panjang busur setengah lingkaran berjari-jari R, maka $\theta = 180^\circ = \pi\,\mathrm{rad}$, sehingga

$$s = \theta R/\,\mathrm{rad} = (\pi\,\mathrm{rad})R/\,\mathrm{rad} = \pi R. \tag{1.2}$$

Oleh karena itu, sebenarnya besaran sudut datar itu tetaplah berdimensi, yaitu dimensi sudut datar, dengan satuan SI yaitu radian alias rad.

Masalah ini diangkat, mengingat dalam teori medan kuantum, misalnya, kita sering mengidentikkan $c = \hbar = 1$ meskipun sebenarnya c dan $\hbar$ itu berbeda dimensi dan satuan.

Bab 2

Kalkulus Diferensial

2.1 Teorema L' Hôpital

Andaikan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah dua buah fungsi riil, serta f' dan g' berturut-turut adalah turunan pertama dari f dan g. Apabila $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{-g'(x)/(g(x))^2}{-f'(x)/(f(x))^2} \\
&= \left(\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \right) \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2
\end{aligned}$$

sehingga

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.} \tag{2.1}$$

Jadi, teorema L' Hôpital bukan hanya berlaku untuk bentuk $0/0$, melainkan juga berlaku untuk bentuk ∞/∞.

Bab 3

Analisis Vektor

3.1 Suatu Identitas Vektor yang Tak Terduga

$$
\begin{aligned}
[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} &\equiv [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{d} \\
&= \epsilon_{jkl}a_jb_kc_ld_m\hat{x}_m \\
&= \delta_{jp}\delta_{mq}\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q \\
&= (\epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}-\epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}+\delta_{jq}\delta_{mp})\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q \\
&= \epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q-\epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}\epsilon_{jkl}a_pb_kc_ld_m\hat{x}_q+\epsilon_{jkl}a_mb_kc_ld_m\hat{x}_j \\
&= \epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}(\vec{b}\times\vec{c})_ja_pd_m\hat{x}_q-\epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}(\vec{b}\times\vec{c})_ja_pd_m\hat{x}_q+(\vec{b}\times\vec{c})_ja_md_m\hat{x}_j \\
&= [(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}]_r\epsilon_{rmq}d_m\hat{x}_q-\epsilon_{rjq}(\vec{d}\times\vec{a})_r(\vec{b}\times\vec{c})_j\hat{x}_q+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= [(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}]\times\vec{d}-(\vec{d}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= [(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}]\times\vec{d}-(\vec{d}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\times\vec{d})-[\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{a}+[\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{d}+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c})
\end{aligned}
$$

Ini berarti

$$[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a} = (\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{d}\times\vec{b})+(\vec{d}\cdot\vec{a})(\vec{b}\times\vec{c}) \tag{3.1}$$

sehingga

$$\boxed{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}\cdot\vec{d})(\vec{a}\times\vec{b}).} \tag{3.2}$$

3.2 Rotasi Benda Tegar

Andaikan $d\theta := \theta_t(t+dt)-\theta$, $\dot{\theta} := d\theta/dt$, $|\hat{\theta}| = 1$, dan $\dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$. Di ruang $\mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$, sebuah titik dengan posisi $\vec{r}$ yang dirotasikan murni secara aktif selama selang waktu dt oleh vektor sudut rotasi $\vec{\theta} = \theta\hat{\theta}$ dengan pangkal di $\vec{0}$ akan mengalami perpindahan ke posisi

$$\begin{aligned}
\vec{r}_t(t+dt) &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos d\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta} + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\vec{r} - (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}) + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \\
&= \vec{r} + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta
\end{aligned}$$

sehingga

$$\vec{r}_t(t+dt) - \vec{r} \equiv d\vec{r} = \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \tag{3.3}$$

alias

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}\times\vec{r}.} \tag{3.4}$$

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan diferensial vektor. Untuk mencari $\vec{r}$ pada waktu t secara eksplisit, maka persamaan tersebut harus diselesaikan untuk $\vec{r}$ yang bergantung t.

3.3 Tensor Kelembamban

Momen kelembaman sebuah sistem n buah partikel terhadap sumbu yang melalui titik asal koordinat yang diwakili oleh vektor satuan $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ didefinisikan sebagai

$$\boxed{I := \sum_{j=1}^{n} m_j |\vec{r}_j \times \hat{n}|^2} \tag{3.5}$$

di mana m_j adalah massa partikel ke-j, $\vec{r}_j := x_{jk}\hat{x}_k$ adalah posisi partikel ke-j, dan $\hat{n} := n_k\hat{x}_k$ adalah vektor satuan sebuah sumbu yang bertitik pangkal di titik asal koordinat, sehingga

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j=1}^{n} m_j \epsilon_{klm} x_{jl} n_m \epsilon_{kpq} x_{jp} n_q \\
&= \sum_{j=1}^{n} m_j (\delta_{lp}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mp}) x_{jl} x_{jp} n_m n_q \\
&= \sum_{j=1}^{n} m_j (x_{jl} x_{jl} n_m n_m - x_{jl} x_{jm} n_m n_l).
\end{aligned}$$

Ini sama saja mengatakan bahwa

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_{js}x_{js}\delta_{ml} - x_{jl}x_{jm})n_m n_l = I_{lm}n_l n_m} \tag{3.6}$$

di mana

$$\boxed{I_{lm} := \sum_{j=1}^{n} m_j(x_{js}x_{js}\delta_{ml} - x_{jl}x_{jm})} \tag{3.7}$$

merupakan komponen tensor kelembaman $\overleftrightarrow{I} := I_{lm}\hat{x}_l \otimes \hat{x}_m$.

3.4 Massa Tereduksi

Andaikan ada sistem dua partikel bermassa m_1 dan m_2 yang berturut-turut menempati posisi $\vec{r}_1$ dan $\vec{r}_2$ yang bergantung pada waktu t. Misalkan kedua partikel tersebut mengalami gaya aksi-reaksi berupa gaya sentral yang saling berlawanan, sehingga gaya yang dialami oleh partikel pertama adalah $\vec{F}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$, serta gaya yang dialami partikel kedua adalah $\vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$, di mana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebarang fungsi riil, dan $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ adalah posisi relatif partikel pertama terhadap partikel kedua. Oleh karena itu, $m_1 m_2\ddot{\vec{r}}_1 = f(|\vec{r}|)m_2\vec{r}/|\vec{r}|$ dan $m_1 m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -f(|\vec{r}|)m_1\vec{r}/|\vec{r}|$, yang selisihnya adalah $m_1 m_2\ddot{\vec{r}} = f(|\vec{r}|)(m_1 + m_2)\vec{r}/|\vec{r}|$ sehingga $\mu\ddot{\vec{r}} = f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$ di mana $\boxed{\mu := m_1 m_2/(m_1 + m_2)}$ adalah massa terseduksi untuk sistem dua partikel tersebut.

Bab 4

Analisis Tensor

4.1 Tensor Sejati dan Tensor Semu

Tensor adalah bentuk umum dari skalar dan vektor. Skalar itu tidak lain adalah tensor rank-0. Vektor itu tidak lain adalah tensor rank-1. Skalar S, vektor $\vec{V} := V_i \hat{x}_i$, tensor rank-2 $\overleftrightarrow{T} := T_{ij} \hat{x}_i \otimes \hat{x}_j$ masing-masing dapat diuraikan menjadi komponen sejatinya (yaitu S_+, $\vec{V}_+$, dan $\overleftrightarrow{T}_+$) dan komponen semunya (yaitu S_-, $\vec{V}_-$, dan $\overleftrightarrow{T}_-$). Sifat skalar sejati, vektor sejati, dan tensor rank-2 sejati tersebut adalah bahwa apabila variabel ruangnya dikenai transformasi $R \in O(n)$, maka $S'_+ = S_+$, $V'_{+i} = R_{ij} V_{+j}$, dan $T'_{+ij} = R_{ik} R_{jl} T_{+kl}$. Sifat skalar semu, vektor semu, dan tensor rank-2 semu tersebut adalah bahwa apabila variabel ruangnya dikenai transformasi $R \in O(n)$, maka $S'_- = (\det R) S_-$, $V'_{-i} = (\det R) R_{ij} V_{-j}$, dan $T'_{-ij} = (\det R) R_{ik} R_{jl} T_{-kl}$.

4.2 Skalar Sejati dan Skalar Semu

Skalar sejati S_+ di $\mathbb{R}^n$ adalah medan skalar yang bergantung pada variabel ruang, yang apabila variabel ruang tersebut dikenai transformasi yang diwakili oleh matriks riil $R \in O(n)$ berlarik $n \times n$, maka medan skalar tersebut tidak berubah, yaitu bahwa $S'_+ = S_+$.

Skalar semu S_- di $\mathbb{R}^n$ adalah medan skalar yang bergantung pada variabel ruang, yang apabila variabel ruang tersebut dikenai transformasi yang diwakili oleh matriks riil $R \in O(n)$ berlarik $n \times n$, maka medan skalar tersebut berubah, yaitu bahwa $S'_- = (\det R) S_-$.

Sebuah medan skalar S di $\mathbb{R}^n$ dapat diuraikan sebagai kombinasi dari skalar sejati dan skalar semu, yaitu $S = S_+ + S_-$. Apabila S dikenai transformasi $R \in O(n)$, maka $S' = S'_+ + S'_- = S_+ + (\det R) S_-$. Dalam bentuk matriks, kedua persamaan tersebut dapat disajikan sebagai

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \det R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ S' \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

yang melalui aturan Cramer, penyelesaiannya adalah

$$\boxed{S_+ = \frac{S' - (\det R)S}{1 - \det R}} \quad \text{dan} \quad \boxed{S_- = \frac{S - S'}{1 - \det R}.} \tag{4.2}$$

4.3 Hasil Kali Silang antara Dua Vektor Sejati

Andaikan $\vec{a} := a_i \hat{x}_i$ dan $\vec{b} := b_i \hat{x}_i$ adalah dua buah vektor sejati di $\mathbb{R}^3$. Andaikan kita definisikan vektor $\vec{c} := c_i \hat{x}_i = \vec{a} \times \vec{b}$ yang akan ditransformasikan oleh matriks $R \in O(3)$ menjadi vektor $\vec{c}' := c'_i \hat{x}'_i$, sehingga

$$\begin{aligned} \vec{c}' &= c'_s \hat{x}'_s = \vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{jkl} \hat{x}'_j a'_k b'_l \\ &= \epsilon_{jkl} R_{jm} \hat{x}_m R_{kp} a_p R_{lq} b_q = (\det R) \epsilon_{mpq} \hat{x}_m a_p b_q \\ &= (\det R) \vec{a} \times \vec{b} = (\det R) \vec{c} = (\det R) c_m \hat{x}_m \\ &= (\det R) c_m R_{sm} \hat{x}'_s \end{aligned}$$

sehingga $c'_s = (\det R) R_{sm} c_m$. Ini berarti bahwa $\vec{c}$ adalah vektor semu.

Bab 5

Matriks

5.1 Semua Anggota Grup O(2) dan SO(2)

Grup O(2) adalah himpunan semua matriks riil A berlarik 2×2 yang memiliki invers sedemikian $A^{\mathrm{T}}A = 1$ disertai perkalian matriks biasa. Sedangkan grup SO(2) adalah himpunan semua matriks anggota grup Ø(2) yang memiliki nilai determinan 1.

Semua anggota grup O(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -(-1)^n \sin\alpha & (-1)^n \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

untuk semua $n \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Semua anggota grup SO(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$.

Matriks-matriks anggota grup O(2) merupakan matriks rotasi atau pencerminan di $\mathbb{R}^2$ yang memiliki nilai determinan 1 atau -1, sedangkan matriks-matriks anggota grup SO(2) merupakan matriks rotasi di $\mathbb{R}^2$ yang memiliki nilai determinan 1.

Sebuah titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yang dicerminkan secara aktif oleh garis lurus $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \tan\alpha\}$, di mana $\alpha \in \mathbb{R}$, akan mengalami transformasi ke titik $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ sedemikian

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Inilah bentuk eksplisit dari matriks pencerminan di $\mathbb{R}^2$.

5.2 Semua Anggota Grup U(2) dan SU(2)

Grup U(2) adalah himpunan semua matriks kompleks A berlarik 2×2 yang memiliki invers sedemikian $A^\dagger A = 1$ disertai perkalian matriks biasa. Sedangkan grup SU(2) adalah himpunan semua matriks anggota grup U(2) yang memiliki determinan 1.

Semua anggota grup U(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} e^{i\gamma}\cos\alpha & e^{i\beta}\sin\alpha \\ -e^{i(\eta-\beta)}(-1)^p\sin\alpha & e^{i(\eta-\gamma)}(-1)^p\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

untuk semua $p \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha,\beta,\gamma,\eta \in \mathbb{R}$.

Semua anggota grup SU(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} e^{i\gamma}\cos\alpha & e^{i\beta}\sin\alpha \\ -e^{-i\beta}\sin\alpha & e^{-i\gamma}\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

untuk semua $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

5.3 Semua Anggota Grup SO(3)

Apabila sebuah titik $\vec{r} := (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ dirotasikan secara aktif oleh suatu vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang berpangkal di titik $\vec{0} := (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, di mana $\hat{\theta} := (n_x,n_y,n_z)$ adalah vektor satuan arah sudut rotasi, dan $\theta := |\vec{\theta}|$ adalah besar sudut rotasi, maka titik $\vec{r}$ tersebut akan mengalami transformasi ke titik $\vec{r}\,' := (x_1',x_2',x_3') \in \mathbb{R}^3$, sedemikian rupa sehingga

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' = x_j'\hat{x}_j &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + \Big(\vec{r} - (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}\Big)\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (1-\cos\theta)(\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + \vec{r}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (1-\cos\theta)n_kx_kn_j\hat{x}_j + x_j\hat{x}_j\cos\theta + \epsilon_{jkl}\hat{x}_jn_kx_l\sin\theta. \end{aligned}$$

Ini berarti

$$\begin{aligned} x_j' &= (1-\cos\theta)n_kx_kn_j + x_j\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_kx_l\sin\theta \\ &= \Big((1-\cos\theta)n_ln_j + \delta_{jl}\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k\sin\theta\Big)x_l \\ &= R_{jl}x_l \end{aligned} \tag{5.6}$$

sehingga

$$R_{jl} := (1-\cos\theta)n_ln_j + \delta_{jl}\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k\sin\theta \tag{5.7}$$

untuk semua $j,l \in \{1,2,3\}$. Ternyata, matriks rotasi $R \in \mathrm{SO}(3)$ dengan kesembilan unsur yang didefinisikan pada persamaan (5.7) untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$ sedemikian $n_jn_j = 1$ ini membentuk grup SO(3), dengan sifat $R^{\mathrm{T}}R = 1$ alias $R_{jl}R_{jm} = \delta_{lm}$, dan $\det R = 1$.

Bab 6

Transformasi Integral

6.1 Invers dalam Grup Konvolusi

Konvolusi antara dua buah fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ didefinisikan sedemikian

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds. \tag{6.1}$$

Transformasi Fourier $F : C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ didefinisikan sedemikian

$$(F(f))(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt. \tag{6.2}$$

Himpunan semua fungsi $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ disertai operasi konvolusi ternyata membentuk sebuah grup, yaitu grup konvolusi. Ternyata, terdapat sebuah isomorfisme, yaitu $\sqrt{2\pi}F$, dari grup konvolusi fungsi ke grup perkalian fungsi sedemikian $F(f * g) = \sqrt{2\pi}F(f)F(g)$.

Dalam grup konvolusi fungsi, terdapat sebuah unsur identitas, yaitu delta Dirac δ, yang salah satunya didefinisikan sedemikian $\delta(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk$. Apabila fungsi f dan g saling invers dalam grup konvolusi ini, maka haruslah $f * g = \delta$. Apabila kedua ruas persamaan terakhir ini dikenai transformasi Fourier F, maka terjadilah $F(f *$

$g) = F(\delta)$ alias $\sqrt{2\pi}F(f)F(g) = 1_f/\sqrt{2\pi}$ alias $g = (1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$, sehingga

$$
\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\left(\frac{1}{2\pi}F^{-1}\left(\frac{1_f}{F(f)}\right)\right)(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1_f}{F(f)}\right)(u)e^{-isu}du\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isu}}{\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{iuw}dw}du\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)e^{-isu}ds}{\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{iuw}dw}du.
\end{aligned}
$$

Apabila $t - s = \alpha$ dengan t konstan relatif, maka $ds = -d\alpha$ dan $e^{-isu} = e^{-i(t-\alpha)u}$. sehingga

$$
\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)e^{i\alpha u}d\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{iuw}dw}e^{-iut}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}du = \delta(t).
\end{aligned}
$$

Jadi, dalam grup konvolusi fungsi, invers dari fungsi f adalah $(1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$.

Bab 7

Kalkulus Variasi

7.1 Persamaan Geodesik

Penggal jarak dalam ruang melengkung dapat dinyatakan sebagai ds sedemikian rupa sehingga

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j, \tag{7.1}$$

di mana g_{ij} adalah komponen metrik, serta q^i adalah koordinat umum, sehingga variasi dari persamaan (7.1) adalah $2ds\delta ds = \delta g_{ij} dq^i dq^j + g_{ij} dq^j \delta dq^i + g_{ij} dq^i \delta dq^j$. Jarak antara dua buah titik pada ruang melengkung didefinisikan sebagai $s_{21} := s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds$. Agar supaya jarak tersebut menjadi stasioner, maka variasi dari s_{21} harus sama dengan nol, yaitu bahwa $\delta s_{21} = 0$ alias $\delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0$ alias $\int_{s_1}^{s_2} \delta ds = 0$. Tentu saja,

$$\delta ds = \frac{1}{2}\left(\delta g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} + g_{ij}\frac{dq^j}{ds}\delta\frac{dq^i}{ds} + g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\delta\frac{dq^j}{ds}\right)ds. \tag{7.2}$$

Kita tentu tahu bahwa

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\delta q^k, \tag{7.3}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\delta ds &= \frac{1}{2}\left(\delta g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} + \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\delta q^i\right) - \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^j}{ds}\right)\delta q^i\right.\\ &\quad \left. + \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\delta q^j\right) - \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\right)\delta q^j\right)ds. \end{aligned}\tag{7.4}$$

Andaikan $(\delta q^i)_s(s_1) = (\delta q^i)_s(s_2) = 0$ maka pengintegralan pada persamaan (7.4) menghasilkan

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_2} \delta ds &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{kj}\frac{dq^j}{ds} + g_{ik}\frac{dq^i}{ds}\right)\right)\delta q^k ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\right)\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} - 2g_{ik}\frac{d^2q^i}{ds^2}\right)\delta q^k ds = 0.\end{aligned}$$

Karena δq^k itu saling bebas, maka integran pada persamaan terakhir ini haruslah nol, yaitu bahwa

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\right)\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} - g_{ik}\frac{d^2q^i}{ds^2} = 0. \tag{7.5}$$

Apabila kedua ruas persamaan terakhir ini dikalikan dengan g^{kl}, maka diperoleh kaitan

$$\boxed{\frac{d^2q^l}{ds^2} + \Gamma^l{}_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} = 0} \tag{7.6}$$

di mana

$$\boxed{\Gamma^l{}_{ij} := \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)} \tag{7.7}$$

adalah lambang Christoffel alias koneksi Levi-Civita yang bebas torsi. Persamaan (7.6) merupakan persamaan geodesik yang mengatur hubungan antara koordinat-koordinat umum q^i dengan parameter jarak s. Dari persamaan (7.1), diperoleh kaitan

$$ds^2 = g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds}ds^2 \tag{7.8}$$

sehingga haruslah

$$\boxed{g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} = 1.} \tag{7.9}$$

Jadi, persamaan geodesik (7.6) harus disertai persamaan (7.9).

Bab 8

Kuarternion

8.1 Kuarternion dalam Bentuk Polar

Diketahui perkalian antara anggota basis kuarternion i, j, k sebagai berikut, yaitu $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$, dan $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Sebuah kuarternion riil $q := q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu bahwa $q = |q|e^{u\Theta} = |q|(\cos\Theta + u\sin\Theta)$, di mana $u^2 = -1$, $\Theta \in \mathbb{R}$ dan

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \tag{8.1}$$

sehingga $q_0 = |q|\cos\Theta$ dan $iq_1 + jq_2 + kq_3 = u|q|\sin\Theta$. Dari sini, kita peroleh

$$u := (iq_1 + jq_2 + kq_3)/\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{8.2}$$

di mana $q_1 = r\sin\theta\cos\phi$, $q_2 = r\sin\theta\sin\phi$, dan $q_3 = r\cos\theta$, sehingga

$$r := \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \tag{8.3}$$

$\theta := \arctan_2(q_3, \sqrt{q_1^2 + q_2^2})$, $\phi := \arctan_2(q_1, q_2)$, dan $\Theta := \arctan_2(q_0, \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2})$, sehingga $u = i\sin\theta\cos\phi + j\sin\theta\sin\phi + k\cos\theta$ dan $r := |q|\sin\Theta$.