Diktat Kuliah Elektrodinamika, Fisika Matematika III, Fisika Matematika Lanjutan, Gelombang, dan Optika

Richard Tao Roni Hutagalung, M.Sc.

22 Desember 2018

Kata Pengantar

Daftar Isi

Bab 1

Elektrodinamika

1.1 Hukum Coulomb Non-Relativistik

Muatan listrik merupakan sebuah besaran skalar riil yang nilainya dapat positif maupun negatif, sedangkan massa merupakan sebuah besaran skalar riil tak negatif. Muatan listrik merupakan kelipatan bulat dari $\pm e$, di mana $e := 1,6(10^{-19})\,\mathrm{C}$ merupakan muatan elementer alias muatan satu buah proton.

Andaikan di suatu ruang hampa $\mathbb{R}^3$ hanya terdapat dua buah partikel, yaitu partikel ke-1 dan partikel ke-2. Secara non-relativistik, di ruang $\mathbb{R}^3$ tersebut, gaya yang dialami oleh partikel ke-1 yang bermassa m_1 dan bermuatan q_1 yang terletak pada posisi $\vec{r}_1$, akibat partikel ke-2 yang bermassa m_2 dan bermuatan q_2 yang terletak pada posisi $\vec{r}_2$, pada waktu t adalah

$$\vec{F}_{12} := m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) + q_1\left(\frac{\kappa_e q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) + \dot{\vec{r}}_1 \times \frac{\kappa_m q_2 \dot{\vec{r}}_2 \times (\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\right) \tag{1.1}$$

di mana G adalah tetapan gravitasi umum, $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dan $\kappa_m := \mu_0/(4\pi)$, dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik ruang hampa, dan μ_0 adalah permeabilitas magnet ruang hampa. Gaya yang dialami oleh partikel ke-2 akibat partikel ke-1 adalah

$$\vec{F}_{21} := m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) + q_2\left(\frac{\kappa_e q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) + \dot{\vec{r}}_2 \times \frac{\kappa_m q_1 \dot{\vec{r}}_1 \times (\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}\right). \tag{1.2}$$

Ungkapan

$$F_{12}^C := \frac{\kappa_e q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \tag{1.3}$$

merupakan *gaya Coulomb* yang dialami oleh partikel ke-1 akibat partikel ke-2.

Apabila $m_1 = m_2 = 0$ serta $q_1 \neq 0$ dan $q_2 \neq 0$, maka persamaan (1.1) menjadi

$$\kappa_e(\vec{r}_1-\vec{r}_2) + \kappa_m\dot{\vec{r}}_1 \times (\dot{\vec{r}}_2 \times (\vec{r}_1-\vec{r}_2)) = \vec{0} \tag{1.4}$$

alias

$$\kappa_e(\vec{r}_1-\vec{r}_2) + \kappa_m((\dot{\vec{r}}_1 \cdot (\vec{r}_1-\vec{r}_2))\dot{\vec{r}}_2 - (\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_1-\vec{r}_2)) = \vec{0} \tag{1.5}$$

alias

$$(\kappa_e - \kappa_m\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_1-\vec{r}_2) + \kappa_m(\dot{\vec{r}}_1 \cdot (\vec{r}_1-\vec{r}_2))\dot{\vec{r}}_2 = \vec{0}, \tag{1.6}$$

serta, secara serupa, persamaan (1.2) menjadi

$$(\kappa_e - \kappa_m\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_2-\vec{r}_1) + \kappa_m(\dot{\vec{r}}_2 \cdot (\vec{r}_2-\vec{r}_1))\dot{\vec{r}}_1 = \vec{0}. \tag{1.7}$$

Untuk mencari $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \mapsto t$, dibutuhkan persamaan (1.6) dan (1.7), yang memberikan kesimpulan bahwa meskipun gaya yang dialami oleh partikel ke-1 dan partikel ke-2 sama-sama nol, tetapi percepatan keduanya secara umum tidak nol.

1.2 Medan Listrik Non-Relativistik

Secara non-relativistik, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat sebuah titik bermuatan q' yang terletak di posisi $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \frac{\kappa_e q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}') \tag{1.8}$$

di mana $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$, di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Secara non-relativistik pula, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat N buah titik bermuatan $q_1, \cdots, q_N$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}'_1, \cdots, \vec{r}'_N \in \mathbb{R}^3$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \kappa_e \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|^3}(\vec{r} - \vec{r}'_n). \tag{1.9}$$

Untuk agihan kontinyu, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat distribusi muatan berbentuk $D \subseteq \mathbb{R}^3$ di mana muatan dq' terletak di posisi $\vec{r}'$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \kappa_e \int_D \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq'. \tag{1.10}$$

Apabila D merupakan sebuah kurva yang memiliki distribusi rapat muatan kurva $\lambda' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \lambda'|d\vec{r}'|$. Apabila D merupakan sebuah permukaan yang memiliki distribusi rapat muatan permukaan $\sigma' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \sigma'|d^2\vec{r}'|$. Apabila D merupakan sebuah permukaan yang memiliki distribusi rapat muatan permukaan $\rho' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \rho'|d^3\vec{r}'|$.

1.3 Hukum Gauss Non-Relativistik

Andaikan ada sebuah volume berarah $V \subseteq \mathbb{R}^3$, sehingga batasnya berupa sebuah permukaan berarah, yaitu ∂V. Andaikan pula ada barisan muatan titik, yaitu $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ dan $q'_1, q'_2, q'_3, \cdots, q'_{n'}$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots, \vec{r}_n \in V$ dan $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3, \cdots, \vec{r}'_{n'} \notin V$, sehingga vektor medan listrik pada titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat barisan muatan tersebut secara non-relativistik adalah

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} + \sum_{k=1}^{n'} q'_j \frac{\vec{r}-\vec{r}'_j}{|\vec{r}-\vec{r}'_j|^3}\right) \tag{1.11}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa.

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d^2\vec{r} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}\cdot d^2\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3}\cdot d^2\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}\cdot d^2\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3}\cdot d^2\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \int_V \nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} d^3\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \int_V \nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3} d^3\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j) d^3\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'_k) d^3\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n} q_j
\end{aligned} \tag{1.12}$$

karena

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j) d^3\vec{r} = 1 \tag{1.13}$$

dan

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'_k) d^3\vec{r} = 0. \tag{1.14}$$

Di sini, $\delta^{(3)}$ adalah delta Dirac 3-dimensi.

Apabila $Q_{\text{in}} := \sum_{j=1}^{n} q_j$ adalah muatan yang seluruhnya terletak pada V, maka hukum Gauss non-relativistik dapat kita tuliskan sebagai

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d^2\vec{r} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}. \tag{1.15}$$

1.4 Potensial Listrik Non-Relativistik

Medan listrik non-relativistik $\vec{E}$ pada posisi $\vec{r}$ yang tampil pada persamaan (1.8) akibat sebuah partikel klasik bermuatan q' yang terletak pada posisi $\vec{r}'$ itu bersifat konservatif, yaitu bahwa

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{1.16}$$

untuk sebarang luasan $A \subset \mathbb{R}^3$.

Menurut teorema Stokes, persamaan (1.16) setara dengan

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d^2\vec{r} = 0 \tag{1.17}$$

untuk sebarang luasan $A \subset \mathbb{R}^3$, sehingga

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \tag{1.18}$$

Penyelesaian persamaan (1.18) adalah

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \tag{1.19}$$

untuk suatu potensial listrik skalar φ, sehingga

$$\varphi = \frac{\kappa_e q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{1.20}$$

di mana $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$, di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik ruang hampa.

1.5 Tenaga Listrik Non-Relativistik

Tenaga potensial listrik yang timbul antara dua partikel bermuatan q dan q' yang terpisah pada jarak R adalah

$$V = \frac{\kappa q q'}{R} \tag{1.21}$$

di mana $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$, dan ϵ_0 merupakan permitivitas listrik ruang hampa.

Tenaga potensial listrik yang timbul oleh partikel-partikel bermuatan listrik $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ adalah

$$V = \frac{1}{2}\kappa \sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{1.22}$$

Tenaga potensial listrik yang dialami oleh partikel bermuatan listrik q yang terletak pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat oleh partikel-partikel bermuatan listrik $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ adalah

$$V = \kappa q \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \tag{1.23}$$

Bab 2

Fisika Matematika III

Bab 3

Fisika Matematika Lanjutan

3.1 Persamaan Bernoulli

Persamaan diferensial Bernoulli adalah

$$y' + Py = Q \tag{3.1}$$

di mana $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $P, Q \mapsto x$.

Jika kedua ruas persamaan (3.1) dikalikan dengan e^I, sedemikian $dI/dx = P$ alias $I = I_0 + \int_0^x P\,dx$, di mana I_0 konstan, maka persamaan tersebut menjadi

$$\frac{d}{dx}(ye^I) = Qe^I. \tag{3.2}$$

Pengintegralan persamaan (3.2) menghasilkan

$$ye^I - y_0 e^{I_0} = \int_0^x Qe^I\,dx \tag{3.3}$$

alias

$$y = e^{-I}\left(y_0 e^{I_0} + \int_0^x Qe^I\,dx\right) \tag{3.4}$$

alias

$$y = e^{-\int_0^x P\,dx}\left(y_0 + \int_0^x Qe^{\int_0^x P\,dx}dx\right) \tag{3.5}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (3.1).

Sekarang, andaikan ada persamaan diferensial yang lebih umum daripada persamaan (3.1), yaitu

$$y' + Py = Qy^n \tag{3.6}$$

di mana $n \in \mathbb{R}$. Substitusi $z := y^{1-n}$ alias $y = z^{1/(1-n)}$ menghasilkan $z' := dz/dx = (1-n)y^{-n}y'$ alias $y' = (1-n)^{-1}y^n z' = (1-n)^{-1}z^{n/(1-n)}z'$, sehingga persamaan (3.6) menjadi

$$(1-n)^{-1}z^{n/(1-n)}z' + Pz^{1/(1-n)} = Qz^{n/(1-n)}. \tag{3.7}$$

Apabila kedua ruas persamaan (3.7) dikalikan dengan $(1-n)z^{-n/(1-n)}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$z' + (1-n)Pz = (1-n)Q, \tag{3.8}$$

sehingga

$$z = y^{1-n} = e^{-(1-n)\int_0^x P\,dx}\left(z_0 + (1-n)\int_0^x Qe^{(1-n)\int_0^x P\,dx}\right) \tag{3.9}$$

alias

$$y = \left(e^{-(1-n)\int_0^x P\,dx}\left(y_0^{1-n} + (1-n)\int_0^x Qe^{(1-n)\int_0^x P\,dx}\right)\right)^{1/(1-n)} \tag{3.10}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (3.6).

3.2 Persamaan Diferensial Linier Orde-2

Persamaan diferensial orde-2 berbentuk

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.11}$$

di mana $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $y'' := dy'/dx$.

Persamaan (3.11) itu identik dengan

$$(d/dx - k_+)(d/dx - k_-)y = 0 \tag{3.12}$$

di mana

$$k_\pm := \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.13}$$

Apabila didefinisikan

$$z := (d/dx - k_-)y \equiv y' - k_- y, \tag{3.14}$$

maka persamaan (3.12) menjadi

$$(d/dx - k_+)z = 0 \quad \text{alias} \quad z' = k_+ z \quad \text{alias} \quad dz/z = k_+ dx. \tag{3.15}$$

Pengintegralan persamaan (3.15) menghasilkan

$$\ln(z/z_0) = k_+ x \quad \text{alias} \quad z = z_0 e^{k_+ x} = (y'_0 - k_- y_0)e^{k_+ x}. \tag{3.16}$$

Dengan memasukkan nilai z dari persamaan (3.16) ke persamaan (3.14), diperoleh

$$y' - k_- y = (y'_0 - k_- y_0)e^{k_+ x} \tag{3.17}$$

yang merupakan persamaan Bernoulli, yang penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned}
y &= e^{k_- x}\left(y_0 + (y'_0 - k_- y_0)\int_0^x e^{(k_+ - k_-)x} dx\right) \\
&= e^{k_- x}\left(y_0 + \frac{y'_0 - k_- y_0}{k_+ - k_-}(e^{(k_+ - k_-)x} - 1)\right) \\
&= e^{k_- x}\frac{(k_+ - k_-)y_0 + (y'_0 - k_- y_0)(e^{(k_+ - k_-)x} - 1)}{k_+ - k_-} \\
&= e^{k_- x}\frac{(k_+ y_0 - y'_0) + (y'_0 - k_- y_0)e^{(k_+ - k_-)x}}{k_+ - k_-}
\end{aligned}$$

alias

$$y = \frac{(y'_0 - k_- y_0)e^{k_+ x} + (k_+ y_0 - y'_0)e^{k_- x}}{k_+ - k_-} \tag{3.18}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (3.11).

Apabila $k_- = k_+ = k$, maka persamaan (3.18) menjadi

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{k_- \to k} \frac{(y'_0 - k_- y_0)e^{kx} + (ky_0 - y'_0)e^{k_- x}}{k - k_-} \\
&= -\lim_{k_- \to k}(-y_0 e^{kx} + (ky_0 - y'_0)xe^{k_- x}) \\
&= -(-y_0 e^{kx} + (ky_0 - y'_0)xe^{kx})
\end{aligned}$$

alias

$$y = ((y'_0 - ky_0)x + y_0)e^{kx}. \tag{3.19}$$

3.3 Persamaan Diferensial Eksak

Andaikan $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $M, N \mapsto (x, y)$.

Persamaan diferensial

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{alias} \quad M + Ny' = 0 \tag{3.20}$$

dikatakan *eksak* apabila terdapat $F \mapsto (x, y)$ sedemikian

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{3.21}$$

Apabila persamaan (3.20) merupakan persamaan diferensial eksak, maka persamaan tersebut dapat dituliskan

$$dF/dx = 0 \quad \text{alias} \quad F = F_x(0). \tag{3.22}$$

Penyelesaian persamaan (3.21) adalah

$$F = F_{x,y}(0, y) + \int_0^x M\,\partial x = F_{x,y}(x, 0) + \int_0^y N\,\partial y \tag{3.23}$$

alias

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.24}$$

yang merupakan syarat agar persamaan (3.20) eksak.

Dari persamaan (3.21), (3.23), dan (3.24), diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dy} F_{x,y}(0, y) + \int_0^x \frac{\partial M}{\partial y} \partial x = N \tag{3.25}$$

alias

$$\frac{d}{dy} F_{x,y}(0, y) + \int_0^x \frac{\partial N}{\partial x} \partial x = N \tag{3.26}$$

alias

$$\frac{d}{dy} F_{x,y}(0, y) - N_{x,y}(0, y) = 0 \tag{3.27}$$

alias

$$F_{x,y}(0, y) = F_{x,y}(0, 0) + \int_0^y N_{x,y}(0, y)dy. \tag{3.28}$$

Substitusi persamaan (3.28) ke persamaan (3.23) menghasilkan

$$F = F_{x,y}(0, 0) + \int_0^y N_{x,y}(0, y)dy + \int_0^x M\,\partial x \tag{3.29}$$

yang merupakan penyelesaian dari persamaan (3.21).

Substitusi persamaan (3.29) ke persamaan (3.22) menghasilkan

$$\int_0^y N_{x,y}(0, y)dy + \int_0^x M\,\partial x = F_x(0) - F_{x,y}(0, 0) \tag{3.30}$$

yang merupakan penyelesaian dari persamaan (3.20).

3.4 Persamaan Diferensial Tak Eksak

Apabila persamaan (3.24) tidak dipenuhi, maka persamaan (3.20) disebut *persamaan diferensial tak eksak*.

Agar supaya persamaan (3.20) menjadi persamaan diferensial eksak, maka kedua ruas dari persamaan (3.20) harus dikalikan dengan *faktor integral* $u \mapsto (x, y)$, sehingga

$$uM\,dx + uN\,dy = 0 \tag{3.31}$$

yang akan dipaksa menjadi eksak.

Oleh karena itu, dari persamaan (3.31), haruslah berlaku

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x} \tag{3.32}$$

alias

$$\frac{\partial u}{\partial y}M + u\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}N + u\frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.33}$$

alias

$$u = \frac{N\partial u/\partial x - M\partial u/\partial y}{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}. \tag{3.34}$$

Apabila ternyata u hanya bergantung pada x saja, maka tentu saja $\partial u/\partial x = du/dx$ dan $\partial u/\partial y = 0$, sehingga persamaan (3.34) menjadi

$$u = \frac{N}{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}\frac{du}{dx} \tag{3.35}$$

alias

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx = \frac{du}{u} \tag{3.36}$$

alias

$$\int_0^x \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx = \ln\frac{u}{u_0} \tag{3.37}$$

alias

$$u = u_0 \exp\int_0^x \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx. \tag{3.38}$$

Sekali lagi, peubah u pada persamaan (3.38) harus bergantung pada x saja. Apabila u tersebut masih bergantung pada y juga, maka u yang diperoleh dari persamaan (3.38) bukanlah faktor integral sebagaimana dimaksud sebelumnya, sehingga persamaan (3.31) gagal dijadikan persamaan diferensial eksak.

3.5 Kalkulus Variasi yang Lebih Umum

Andaikan ada besaran $\mathcal{L}$ yang bergantung pada $q^1, \cdots, q^n$, $\partial_1 q^1, \cdots, \partial_1 q^n$, $\cdots, \cdots, \cdots$, $\partial_m q^1, \cdots, \partial_m q^n$, $t^1, \cdots, t^m$, di mana $\partial_j q^i := \partial q^i / \partial t^j$. Kita akan membuat nilai

$$I := \int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \mathcal{L} dt^1 \cdots dt^m \tag{3.39}$$

menjadi stasioner, yaitu bahwa $\delta I = 0$, dengan menganggap $\delta t^j = 0$, serta

$$(\delta q^i)_{t^1,\cdots,t^m}(t^1, \cdots, t^{j-1}, t_-^j, t^{j+1}, \cdots, t^m) = (\delta q^i)_{t^1,\cdots,t^m}(t^1, \cdots, t^{j-1}, t_+^j, t^{j+1}, \cdots, t^m) = 0 \tag{3.40}$$

untuk setiap $j \in \{1, \cdots, m\}$, sehingga

$$\int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} \delta \frac{\partial q^i}{\partial t^j} \right) dt^1 \cdots dt^m = 0. \tag{3.41}$$

Karena $\delta(\partial q^i / \partial t^j) = \partial(\delta q^i)/\partial t^j$, maka persamaan (3.41) menjadi

$$\int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} \right) \delta q^i \, dt^1 \cdots dt^m = 0. \tag{3.42}$$

Karena persamaan (3.42) berlaku untuk sebarang variasi dan batas-batas integrasi, maka persamaan (3.42) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} = 0. \tag{3.43}$$

Apabila $m = 1$, $t^1 = t$, dan $\mathcal{L} = L$, maka persamaan (3.43) menjadi

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0. \tag{3.44}$$

Andaikan ada p buah kendala, yaitu $\varphi_k = 0$, dengan $\varphi_k \mapsto (q^1, \cdots, q^n, t^1, \cdots, t^m)$, untuk semua $k \in \{1, \cdots, p\}$, maka Lagrangian $\mathcal{L}$ pada persamaan (3.43) dapat diganti dengan $\mathcal{L} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k$, dengan λ_k adalah *pengali Lagrange*, sehingga persamaan (3.43) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i / \partial t^j)} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^i} = 0. \tag{3.45}$$

Diferensial dari persamaan $\varphi_k = 0$ adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^i} dq^i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t^j} dt^j = 0, \tag{3.46}$$

sehingga persamaan (3.46) dapat diringkas bentuknya menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} dq^i + \sum_{j=1}^{m} b_{kj} dt^j = 0, \tag{3.47}$$

di mana $a_{ki} := \partial\varphi_k/\partial q^i$ dan $b_{kj} := \partial\varphi_k/\partial t^j$, sehingga persamaan (3.45) menjadi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial q^i/\partial t^j)} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{ki} = 0. \tag{3.48}$$

Apabila pada persamaan (3.47) tidak diketemukan φ_k yang memenuhi persamaan $\partial\varphi_k/\partial q^i = a_{ki}$ dan $\partial\varphi_k/\partial t^j = b_{kj}$, maka bentuk diferensial pada persamaan (3.47) disebut *diferensial tak eksak*. Oleh karena itu, untuk mencari $q^1, \cdots, q^n \mapsto (t^1, \cdots, t^m)$ dan $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, diperlukan n buah persamaan (3.48) dan p buah persamaan (3.47).

3.6 Fungsi Peubah Kompleks

Ada sebuah bilangan imajiner $i \in \mathbb{C}$ yang memenuhi sifat $i^2 = -1$. Tentu saja, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, dan $i^{4n+3} = -i$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Apabila ada pemetaan $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, maka dengan bantuan deret Taylor, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n, i) &= \sum_{j_1,\cdots,j_n,k=0}^{\infty} \frac{1}{j_1! \cdots j_n! k!} f_{j_1 \cdots j_n k}(0) x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} i^k \\ &= \sum_{j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty} \frac{x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}}{j_1! \cdots j_n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k)}(0)}{(4k)!} - \frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k+2)}(0)}{(4k+2)!} \right) \right. \\ &\qquad \left. + i \left(\frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k+1)}(0)}{k!} - \frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k+3)}(0)}{(4k+3)!} \right) \right) \end{aligned} \tag{3.49}$$

di mana

$$f_{j_1,\cdots,j_n,k}(X_1, \cdots, X_n, Y) := \lim_{x_1 \to X_1} \cdots \lim_{x_n \to X_n} \lim_{y \to Y} \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n + k} f(x_1, \cdots, x_n, y)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n} \partial y^k}. \tag{3.50}$$

Dari persamaan (3.49), tampak bahwa $f(x_1, \cdots, x_n, i)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $u + iv$, di mana $u, v \in \mathbb{R}$, yaitu bahwa $u := \operatorname{Re} f(x_1, \cdots, x_n, i)$ dan $v := \operatorname{Im} f(x_1, \cdots, x_n, i)$ berturut-turut adalah bagian riil dan imajiner dari $f(x_1, \cdots, x_n, i)$.

Andaikan ada sebuah bilangan kompleks $z \in \mathbb{C}$. Apabila pada persamaan (3.49), $n = 2$ serta $x := x_1 := \operatorname{Re} z$ dan $y := x_2 := \operatorname{Im} z$, maka $f(x, y, i) = u + iv = f(z) =: w$, di mana $u, v \mapsto (x, y)$, sedemikian $u := \operatorname{Re} f(z)$ dan $v := \operatorname{Im} f(z)$, serta kali ini $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dikatakan *analitik* / *reguler* / *holomorfis* / *monogenik* pada suatu daerah $A \subseteq \mathbb{C}$, di mana $\dim A = \dim \mathbb{C}$, apabila f memiliki turunan yang tunggal di setiap titik pada daerah A tersebut.

Apabila fungsi f tersebut analitik pada daerah A tersebut, maka pada daerah A berlaku

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \tag{3.51}$$

serta

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dw}{dz}. \tag{3.52}$$

Dari persamaan (3.51) dan (3.52), diperoleh

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.53}$$

sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.54}$$

yang merupakan akibat dari ke-analitik-an f di A.

Apabila f analitik di A, maka

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} f(z)\, dz &= \oint_{\partial A} (u + iv)(dx + i\, dy) = \oint_{\partial A} (u\, dx - v\, dy) + i \oint_{\partial A} (v\, dx + u\, dy) \\ &= -\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

akibat persamaan (3.54).

Apabila $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik di $A\subseteq\mathbb{C}$ di mana $\dim A=\dim\mathbb{C}$, serta $a\in A$, maka

$$\oint_{\partial A}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a). \tag{3.56}$$

Dengan menurunkan kedua ruas persamaan (3.56) terhadap a sebanyak $n-1$ kali, diperoleh

$$\oint_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a). \tag{3.57}$$

Dengan memasukkan $f(z)=1$ ke dalam persamaan (3.57), diperoleh

$$\oint_{\partial A}\frac{dz}{(z-a)^n}=2\pi i\,\delta_{1n}. \tag{3.58}$$

Titik $a\in\mathbb{C}$ disebut *kutub* tingkat-n menurut fungsi $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ apabila $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(z)=a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_j(z-a)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{(z-a)^j} \tag{3.59}$$

di mana $a_0,a_j,b_j\in\mathbb{C}$ adalah konstanta, sedemikian rupa sehingga $n\in\mathbb{N}$ adalah nilai terbesar yang memenuhi $b_n\neq 0$.

Apabila pada wilayah $A\subseteq\mathbb{C}$, di mana $\dim A=\dim\mathbb{C}$, terdapat p buah kutub, yaitu $a_1,\cdots,a_p\in\mathbb{C}$, maka

$$f(z)=a_{0k}+\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}(z-a_k)^j+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_{jk}}{(z-a_k)^j} \tag{3.60}$$

untuk setiap $j\in\{1,\cdots,p\}$. Apabila $a_j\in A_j\subset A$ adalah satu-satunya kutub di wilayah A_j, maka tentu saja

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A}f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{p}\oint_{\partial A_k}f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}\oint_{\partial A_k}\frac{dz}{(z-a_k)^j}=2\pi i\sum_{k=1}^{p}b_{jk}\delta_{1j}\\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{p}b_{1k}=2\pi i\sum_{k=1}^{p}R(f,a_k)\end{aligned} \tag{3.61}$$

di mana $b_{1k}:=R(f,a_k)$ disebut sebagai *residu* fungsi f di titik a_k.

Untuk memperoleh nilai b_{1k}, dapat dilakukan prosedur sebagai berikut.

Dari persamaan (3.60), apabila a_k adalah kutub tingkat-n menurut fungsi f, maka untuk setiap $m\in\mathbb{N}_0$ yang memenuhi $m\geq n$, berlaku

$$(z-a_k)^m f(z)=a_{0k}(z-a_k)^m+\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}(z-a_k)^{j+m}+\sum_{j=1}^{\infty}b_{jk}(z-a_k)^{m-j} \tag{3.62}$$

lalu

$$\begin{aligned}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) &= m!a_{0k}(z-a_k)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+m)!}{(j+1)!}a_{jk}(z-a_k)^{j+1}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(1-j)!}b_{jk}(z-a_k)^{1-j}\end{aligned} \tag{3.63}$$

lalu

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) = ma_{0k}(z-a_k)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+m)!}{(j+1)!(m-1)!}a_{jk}(z-a_k)^{j+1} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(1-j)!(m-1)!}b_{jk}(z-a_k)^{1-j} \tag{3.64}$$

lalu

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a_k}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) = b_{1k}, \tag{3.65}$$

sehingga persamaan (3.61) menjadi

$$\oint_{\partial A} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{z\to a_k}\frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}}\left((z-a_k)^{m_k} f(z)\right) \tag{3.66}$$

di mana $m_k \in \mathbb{N}_0$ yang memenuhi $m_k \geq n$ untuk setiap $k \in \{1,\cdots,p\}$.

Bab 4

Gelombang

4.1 Deret Fourier

Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan *periodik* dengan periode $T \in \mathbb{R}^+$ apabila $f(t+T) = f(t)$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Setiap fungsi periodik f ini dapat dinyatakan sebagai *deret Fourier*

$$f(t) = Ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right) \tag{4.1}$$

di mana $K, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ adalah tetapan yang hendak dicari kemudian, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Interval periode dari f adalah himpunan interval terbuka $(c, c+T) \subseteq \mathbb{R}$ untuk suatu $c \in \mathbb{R}$. Apabila didefinisikan $2\pi t/T =: u$, maka persamaan (4.1) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = Ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nu + b_n \sin nu) \tag{4.2}$$

sehingga

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t)\,du = 2\pi Ka_0 \tag{4.3}$$

alias

$$a_0 = \frac{1}{KT}\int_c^{c+T} f(t)\,dt. \tag{4.4}$$

Demikian pula,

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t)\cos mu\,du = \pi\sum_{n=1}^{\infty} a_n\delta_{mn} \equiv \pi a_m \tag{4.5}$$

alias

$$a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt \tag{4.6}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Demikian pula,

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t)\sin mu\,du = \pi\sum_{n=1}^{\infty} b_n\delta_{mn} \equiv \pi b_m \tag{4.7}$$

alias

$$b_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt. \tag{4.8}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Agar persamaan (4.4) dan (4.6) memiliki bentuk yang seragam, maka haruslah $K = 1/2$, sehingga persamaan (4.1) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right). \tag{4.9}$$

Perpaduan antara persamaan (4.4) dan (4.6) adalah

$$a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt \tag{4.10}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$.

Karena $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ dan $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i)$, maka persamaan dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(e^{2in\pi t/T} + e^{-2in\pi t/T}) - ib_n(e^{2in\pi t/T} - e^{-2in\pi t/T})\Big). \tag{4.11}$$

alias

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi t/T} \tag{4.12}$$

di mana

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)\,dt \tag{4.13}$$

serta

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{-2in\pi t/T}\,dt \tag{4.14}$$

dan

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{2in\pi t/T}\,dt \tag{4.15}$$

keduanya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Gabungan dari persamaan (4.13), (4.14), dan (4.15) adalah

$$c_n = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{-2in\pi t/T}\,dt \tag{4.16}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Tentu saja, dari persamaan (4.9), diperoleh

$$\langle f^2\rangle_{(c,c+T)} := \frac{1}{T}\int_c^{c+T} (f(t))^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{4.17}$$

yang merupakan *identitas Parseval* untuk deret Fourier.

Dari persamaan (4.13), (4.14), dan (4.15), diperoleh

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad \text{dan} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \tag{4.18}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga persamaan (4.17) menjadi

$$\begin{aligned}\langle f^2\rangle_{(c,c+T)} &= c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((c_n^2 + c_{-n}^2 + 2c_nc_{-n}) - (c_n^2 + c_{-n}^2 - 2c_nc_{-n})) \\ &= c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_nc_{-n} = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

yang merupakan bentuk lain dari identitas Parseval untuk deret Fourier, mengingat $c_{-n} = c_n^*$ dari persamaan (4.14) dan (4.15).

Bab 5

Optika

5.1 Irisan Kerucut

Salah satu tempat kedudukan permukaan kerucut yang memiliki setengah sudut puncak $\beta \in (0,\pi/2)$ adalah

$$C(\beta) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = (x^2+y^2)\cot^2\beta\}. \tag{5.1}$$

Salah satu tempat kedudukan bidang datar yang dipakai untuk mengiris $C(\beta)$ adalah

$$P(\alpha,h) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\tan\alpha - h\} \tag{5.2}$$

di mana $\alpha \in (0,\pi/2)$ adalah sudut kemiringan dari $P(\alpha,h)$, serta $h \in \mathbb{R}$ adalah kerendahan dari $P(\alpha,h)$.

Selanjutnya, akan dicari $C(\beta) \cap P(\alpha,h)$.

Apabila dilakukan transformasi koordinat

$$x' = x, \quad y' = y, \quad \text{dan} \quad z' = z+h, \tag{5.3}$$

lalu dilanjutkan

$$x'' = x', \quad y'' = y'\cos\alpha + z'\sin\alpha, \quad \text{dan} \quad z'' = -y'\sin\alpha + z'\cos\alpha, \tag{5.4}$$

kemudian dibalik menjadi

$$x' = x'', \quad y' = y''\cos\alpha - z''\sin\alpha, \quad \text{dan} \quad z' = y''\sin\alpha + z''\cos\alpha, \tag{5.5}$$

serta

$$x = x' = x'', \quad y = y' = y''\cos\alpha - z''\sin\alpha, \quad \text{dan} \quad z = z' - h = y''\sin\alpha + z''\cos\alpha - h, \tag{5.6}$$

maka $C(\beta)$ menjadi

$$\begin{aligned} C''(\alpha,\beta,h) \;:=\; & \{(x'',y'',z'') \in \mathbb{R}^3 \mid (y''\sin\alpha + z''\cos\alpha - h)^2 \\ & = (x''^2 + (y''\cos\alpha - z''\sin\alpha)^2)\cot^2\beta\}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

serta $P(\alpha,h)$ menjadi

$$P'' := \{(x'',y'',z'') \in \mathbb{R}^3 \mid z'' = 0\}. \tag{5.8}$$

Andaikan $S(\alpha,\beta,h) := C''(\alpha,\beta,h) \cap P''$, maka

$$S(\alpha,\beta,h) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y\sin\alpha - h)^2 = (x^2 + y^2\cos^2\alpha)\cot^2\beta\} \tag{5.9}$$

yang merupakan salah satu bentuk *irisan kerucut*.

Apabila $\alpha = 0$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah lingkaran.

Apabila $0 < \alpha < \pi/2 - \beta$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah elips.

Apabila $\alpha = \pi/2 - \beta$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah parabola.

Apabila $\pi/2 - \beta < \alpha < \pi/2$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah hiperbola.

5.2 Vektor Pantul dan Vektor Bias

Dalam ruang hampa $\mathbb{R}^3$, sinar dengan arah rambat $\hat{i} \in \mathbb{R}^3$ yang mengenai sebuah bidang datar yang memiliki arah normal $\hat{N} \in \mathbb{R}^3$ akan memantul dengan arah

$$\hat{r} = \hat{i} - 2(\hat{i} \cdot \hat{N})\hat{N}. \tag{5.10}$$

Dalam ruang hampa $\mathbb{R}^3$, sinar dengan arah rambat $\hat{i} \in \mathbb{R}^3$ yang memasuki medium berindeks bias mutlak $n \in \mathbb{R}$, di mana bidang batas kedua medium memiliki arah normal $\hat{N} \in \mathbb{R}^3$, akan membias dengan arah

$$\hat{r} = (\hat{r} \cdot \hat{N})\hat{N} + (\hat{r} - (\hat{r} \cdot \hat{N})\hat{N}) \tag{5.11}$$

di mana (menurut hukum Snellius pembiasan)

$$\hat{i} - (\hat{i} \cdot \hat{N})\hat{N} = n(\hat{r} - (\hat{r} \cdot \hat{N})\hat{N}) \tag{5.12}$$

yang kuadrat magnitudonya adalah

$$1 - (\hat{i} \cdot \hat{N})^2 = n^2(1 - (\hat{r} \cdot \hat{N})^2) \tag{5.13}$$

alias

$$(\hat{r} \cdot \hat{N})^2 = 1 - n^{-2}(1 - (\hat{i} \cdot \hat{N})^2) \tag{5.14}$$

alias

$$\hat{r} \cdot \hat{N} = \sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{i} \cdot \hat{N})^2)}\,\mathrm{sgn}(\hat{r} \cdot \hat{N}). \tag{5.15}$$

Karena $\mathrm{sgn}(\hat{r} \cdot \hat{N}) = \mathrm{sgn}(\hat{i} \cdot \hat{N})$, maka persamaan (5.15) menjadi

$$\hat{r} \cdot \hat{N} = \sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{i} \cdot \hat{N})^2)}\,\mathrm{sgn}(\hat{i} \cdot \hat{N}). \tag{5.16}$$

Dari persamaan (5.12) dan (5.16), maka persamaan (5.11) menjadi

$$\hat{r} = \hat{N}\sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{i} \cdot \hat{N})^2)}\,\mathrm{sgn}(\hat{i} \cdot \hat{N}) + n^{-1}(\hat{i} - (\hat{i} \cdot \hat{N})\hat{N}) \tag{5.17}$$

alias

$$\hat{r} = n^{-1}\left(\hat{i} + \hat{N}\left(\sqrt{n^2 - 1 + (\hat{i} \cdot \hat{N})^2}\,\mathrm{sgn}(\hat{i} \cdot \hat{N}) - \hat{i} \cdot \hat{N}\right)\right). \tag{5.18}$$

5.3 Bayangan Titik akibat Dilatasi oleh Titik Garis dan Bidang

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah titik $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{5.19}$$

alias

$$\vec{r}' = k\vec{r} + (1-k)\vec{r}_0. \tag{5.20}$$

Dilatasi $k = -1$ boleh dikatakan sebagai pencerminan.

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah garis lurus $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \vec{0}\}$, di mana $\vec{r}_0, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)\hat{v} \times ((\vec{r} - \vec{r}_0) \times \hat{v}) \tag{5.21}$$

di mana $\hat{v} := \vec{v}/v$ dan $v := |\vec{v}|$.

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah bidang datar $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0\}$, di mana $\vec{r}_0, \vec{N} \in \mathbb{R}^3$, dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{N}\hat{N} \tag{5.22}$$

di mana $\hat{N} := \vec{N}/N$ dan $N := |\vec{N}|$.

5.4 Cermin Cekung dan Cermin Cembung

Andaikan ada sebuah benda yang tingginya $h \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol, yang berdiri tegak lurus sumbu utama sebuah cermin cekung dengan titik fokus yang terletak sejauh $f \in \mathbb{R}$ di depan cermin cekung tersebut. Benda tersebut terletak pada posisi $s \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan cermin cekung tersebut. Bayangan yang dihasilkan oleh cermin cekung tersebut terletak pada posisi $s' \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan cermin cekung tersebut. Tinggi bayangan tersebut adalah $h' \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol. Dari pengamatan geometris sifat-sifat sinar, diperoleh

$$h/(s-f) = -h'/f \quad \text{dan} \quad h/f = -h'/(s'-f). \tag{5.23}$$

Dengan mengeliminasi h dan h' dari kedua persamaan (5.23), diperoleh

$$\begin{aligned} f/(s-f) = (s'-f)/f \quad &\Leftrightarrow \quad f^2 = (s-f)(s'-f) \quad \Leftrightarrow \quad ss' = (s+s')f \\ &\Leftrightarrow \quad 1/f = 1/s + 1/s'. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Dari persamaan (5.24), diperoleh $s' = sf/(s-f)$, sehingga dari persamaan (5.23), diperoleh perbesaran bayangannya, yaitu

$$M := h'/h = f/(f-s) = -s'/s. \tag{5.25}$$

Bayangan dikatakan nyata apabila $s' > 0$. Bayangan dikatakan maya apabila $s' < 0$. Bayangan dikatakan tegak apabila $h' > 0$. Bayangan dikatakan terbalik apabila $h' < 0$. Bayangan dikatakan diperbesar apabila $|M| > 1$. Bayangan dikatakan sama besar apabila $|M| = 1$. Bayangan dikatakan diperkecil apabila $|M| < 1$. Pada cermin cekung, dapat dikatakan $f > 0$. Pada cermin cembung, dapat dikatakan $f < 0$.

5.5 Lensa Cembung dan Lensa Cekung

Andaikan ada sebuah benda yang tingginya $h \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol, yang berdiri tegak lurus sumbu utama sebuah lensa cembung dengan titik fokus yang terletak sejauh $f \in \mathbb{R}$ di belakang lensa cembung tersebut. Benda tersebut terletak pada posisi $s \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan lensa cembung tersebut. Bayangan yang dihasilkan oleh lensa cembung tersebut terletak pada posisi $s' \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di belakang lensa cembung tersebut. Tinggi bayangan tersebut adalah $h' \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol. Dari pengamatan geometris sifat-sifat sinar, diperoleh

$$h/s = -h'/s' \quad \text{dan} \quad h/f = -h'/(s'-f). \tag{5.26}$$

Dengan mengeliminasi h dan h' dari kedua persamaan (5.26), diperoleh

$$\begin{aligned} f/s = (s'-f)/s' \quad &\Leftrightarrow \quad fs' = s(s'-f) \quad \Leftrightarrow \quad fs' + sf = ss' \\ &\Leftrightarrow \quad 1/f = 1/s + 1/s'. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Dari persamaan (5.27), diperoleh $s' = sf/(s-f)$, sehingga dari persamaan (5.26), diperoleh perbesaran bayangannya, yaitu

$$M := h'/h = f/(f-s) = -s'/s. \tag{5.28}$$

Bayangan dikatakan nyata apabila $s' > 0$. Bayangan dikatakan maya apabila $s' < 0$. Bayangan dikatakan tegak apabila $h' > 0$. Bayangan dikatakan terbalik apabila $h' < 0$. Bayangan dikatakan diperbesar apabila $|M| > 1$. Bayangan dikatakan sama besar apabila $|M| = 1$. Bayangan dikatakan diperkecil apabila $|M| < 1$. Pada lensa cembung, dapat dikatakan $f > 0$. Pada lensa cekung, dapat dikatakan $f < 0$.

5.6 Kalkulus Variasi dan Prinsip Fermat

Andaikan ada sinar monokromatis yang merambat di posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$ di dalam medium $\mathbb{R}^3$ yang berindeks bias mutlak $n \in \mathbb{R}$ dengan $n \mapsto (\vec{r}, t)$. Kecepatan sinar tersebut pada waktu t tentu saja $\vec{v} := \dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$, sehingga kelajuannya adalah $v := |\dot{\vec{r}}|$. Menurut hukum Snellius, berlaku kaitan $v = c/n$, di mana c adalah kelajuan sinar dalam ruang hampa, sehingga

$$dt = c^{-1}n|d\vec{r}| = c^{-1}nv\,dt \tag{5.29}$$

dengan keharusan $nv/c = 1$. Oleh karena itu, dengan mengintegralkan persamaan (5.29) dengan batas bawah $t = t_1$ dan batas atas $t = t_2$ untuk sebarang $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, maka diperoleh

$$\Delta t := t_2 - t_1 = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} nv\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{5.30}$$

di mana $L := nv/c$ (yang bergantung secara eksplisit pada $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$, dan t) adalah *Lagrangian* dari sistem optik tersebut.

Dengan menggunakan kalkulus variasi, agar Δt bernilai stasioner, yaitu $\delta\Delta t = 0$, diperoleh persamaan Euler-Lagrange, yaitu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \tag{5.31}$$

alias

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(n|\dot{\vec{r}}|)}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial(n|\dot{\vec{r}}|)}{\partial \vec{r}} \tag{5.32}$$

alias

$$\frac{d}{dt}\left(n\frac{d|\dot{\vec{r}}|}{d\dot{\vec{r}}}\right) = \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}|\dot{\vec{r}}|. \tag{5.33}$$

Karena $d|\dot{\vec{r}}|/d\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}|$, maka persamaan (5.33) menjadi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\right) = \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}|\dot{\vec{r}}| \quad \text{dengan} \quad \frac{n|\dot{\vec{r}}|}{c} = 1 \tag{5.34}$$

yang merupakan persamaan gerak sinar tersebut di ruang $\mathbb{R}^3$.

Apabila n bersifat homogen (konstan), maka dari persamaan (5.34), diperoleh $d(\dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}|) = \vec{0}$ alias $\dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}| = (\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$, sehingga $\dot{\vec{r}} = |\dot{\vec{r}}|(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0| = (c/n)(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$ alias (diintegralkan terhadap t) $\vec{r} = \vec{r}_0 + (ct/n)(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$, yaitu bahwa sinar tersebut bergerak lurus beraturan dengan kelajuan c/n dan arah sebarang, seperti yang diharapkan menurut intuisi fisis yang seharusnya.

5.7 Bayangan Titik akibat Pencerminan oleh Cermin Berbentuk Permukaan Bola

Bayangan dari titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat cermin berbentuk permukaan bola $S^2(\vec{r}_0, R) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r} - \vec{r}_0| = R\}$, di mana $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ adalah titik pusat $S^2(\vec{r}_0, R)$, serta $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari $S^2(\vec{r}_0, R)$, adalah

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + (R + s')\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \tag{5.35}$$

di mana

$$s' := \frac{sf}{s - f}, \qquad s := |\vec{r} - \vec{r}_0| - R, \qquad \text{dan} \qquad f := -\frac{1}{2}R, \tag{5.36}$$

sehingga

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \left(R + \frac{sf}{s - f}\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{5.37}$$

Dari persamaan (5.36), diperoleh bentuk lain dari persamaan (5.37) adalah

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \left(|\vec{r} - \vec{r}_0| - s + \frac{sf}{s - f}\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \tag{5.38}$$

alias

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left(\frac{sf}{s - f} - s\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \tag{5.39}$$

alias

$$\vec{r}' = \vec{r} + (s' - s)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{5.40}$$

Daftar Pustaka

[1] Arfken & Weber , 2005 . *Mathematical Methods for Physicist* . New York : Elsevier Academic Press Publications.

[2] Boas, Mary L. , 1983 . *Mathematical Methods for The Physical Sciences* . New York : John Wiley & Sons.

[3] Goldstein, Herbert , 2005 . *Classical Mechanics* . Manila : Addision-Wesley Publishing Company.

[4] Muslim , 1997 . *Seri Fisika Dasar Bagian I : Mekanika* . Yogyakarta : Laboratorium Fisika Atom dan Inti Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[5] Nakahara, Mikio , 1997 . *Geometry, Topology, and Physics* . London : Institute of Physics Publishing.

[6] Rosyid, M.F. , 2005 . *Mekanika Kuantum* . Yogyakarta : I-Es-Ye dan WGMPCDG Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[7] Rosyid, M.F. , 2005 . *Aljabar Abstrak dalam Fisika* . Yogyakarta : I-Es-Ye dan WGMPCDG Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[8] Wangsness, Roald , 1997 . *Electromagnetics Fields* . New York : John Wiley & Sons.